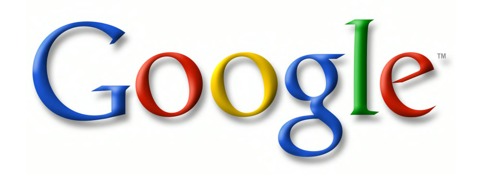
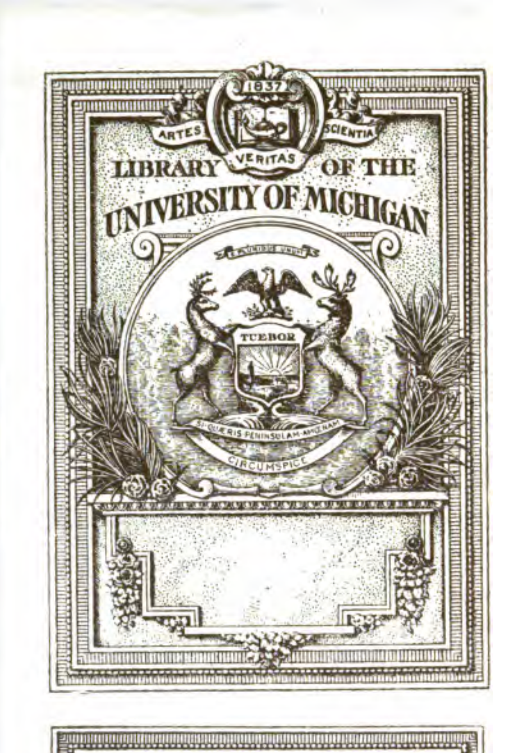



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Alexander Ziwet

Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie

37

von

Aloys Müller

Mit drei Abbildungen

μηδεὶς ἀφιλόσοφος εἰσίτω



Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
1922

Vorwort

besonders von den Mathematikern zu lesen

Diese Schrift versucht zum erstenmal eine Charakteristik des Gegenstandes der Mathematik in ihrem ganzen Bereiche auf Grund der modernen Gegenstandstheorie. Wieweit ich mich dabei auf andere stütze, sagen die Literaturhinweise; vor allem verdanke ich Rickert viel. Meine Ausführungen werden sicherlich noch Mängel und Irrtümer enthalten. Aber das mag alle jungen und jung gebliebenen Geister reizen, dort anzusetzen, wo sie versagen.

Ich wende mich an den Philosophen und den Mathematiker.

Der Philosoph wird die Gegenstandstheorie weiter ausgebildet finden, als er es durchweg gewohnt ist. Um die Mathematik zu verstehen, können wir uns heute mit den analytischen und synthetischen Urteilen ebensowenig wie mit allgemeinen Redensarten über Gedankendinge begnügen. Hier hilft nichts als gründliches gegenstandstheoretisches Arbeiten.

Dem Mathematiker wird das Verständnis der Schrift aus verschiedenen Gründen schwer fallen.

Erstens wird er sich erstaunt fragen, ob denn noch ein anderer als er, der Mathematiker, über die mathematischen Gegenstände etwas sagen könne. In der Tat sagt indes der Mathematiker direkt überhaupt nichts über seine Gegenstände, er arbeitet nur mit ihnen und dadurch bestimmt er indirekt, aber vollständig ihren logischen Typ. Der Philosoph sieht zu wie der Mathematiker arbeitet, und charakterisiert danach Gegenstände allgemein. Der Philosoph will also nur die …matik verstehen, aber ihr nichts vorschreiben.

Zweitens spricht die Schrift nicht die Sprache, die der Mathematiker gewohnt ist. Aber muß das nicht so sein? Sie sagt ja eben nichts Mathematisches, sondern nur Logisches. Und soviel Geistesbeweglichkeit und Kraft zur Selbstüberwindung wird sich der Mathematiker wohl auch bewahrt haben, daß er eine andere wissenschaftliche Sprache als die seine zu verstehen vermag.

Drittens besitzt die Schrift nicht die Exaktheit der mathematischen Arbeiten. Natürlich nicht, sie kann sie ja gar nicht haben. Denn die Exaktheit richtet sich nach dem Gegenstande, der bearbeitet wird. Das Allgemeine an den mathematischen Gegenständen, das die Schrift zu erfassen versucht, erträgt eben die Exaktheit nicht, die die mathematischen Gegenstände haben, weil es, wie die Schrift noch genauer dartun wird, in einem ganz anderen Wirklichkeitsbereiche liegt.

Viertens endlich hat der Mathematiker sich den Zugang zu den eigentlichen logischen Problemen oft genug verbaut durch seine Begeisterung für die Logistik, die er für die Logik hält. Die Logistik ist aus einem Grunde, den wir in der Schrift selber kennen lernen werden, in manchen Punkten exakter als die Logik und schmeichelt dadurch dem Mathematiker, enthält aber in der Tat erstaunlich wenig Logik. Da bleibt nun nichts anderes übrig, als daß der Mathematiker alles das abstreift, was er bisher an Logik gelernt hat oder gelernt zu haben glaubt, daß er gleichsam wieder ein logisches Wickelkind wird und dann die eigentlichen logischen Probleme sehen lernt. Ist ihm das Verständnis für sie aufgegangen, dann wird er auch erkennen, daß die Mathematik eine Wissenschaft ist, bei der man stets weiß, wovon man spricht.

Indem die Schrift den Gegenstand der Mathematik von den Gegenständen anderer Wissenschaften, vor allem auch der Naturwissenschaft, sorgfältig zu scheiden sucht, stößt sie auf das durch die Relativitätstheorie entstandene Problem,

ob die Physik sich in Geometrie auflösen läßt. Ich habe es eigens behandelt, weil es in der heutigen Zeit wohl besonderem Interesse begegnet.

Daß schließlich die Schrift nur die wesentlichen Grundgedanken hinstellt und an vielen Verzweigungen und feineren Problemen vorbeigeht, geschieht darum, weil erst einmal diese Grundgedanken Anerkennung und Eingang finden müssen.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sei auch hier von Herzen gedankt, weil sie das Erscheinen der Schrift ermöglicht hat.

Bonn-Buschdorf, April 1922

Aloys Müller

Inhalt

Einleitung

1. Gegenstand und Methode. Der Jäger, der einen Rehbock erlegen will, setzt sich morgens oder abends an dessen Wechsel an oder er pirscht um diese Zeit Wege, Blößen und Waldränder ab. Will er aber Rebhühner schießen, so geht er tagsüber mit dem Hunde über die Felder, bis der Hund vorsteht und dann mit dem vorrückenden Jäger zusammen die Hühner aufjagt. Das sind zwei grundverschiedene Verfahrungsweisen oder Jagdmethoden, die der Jäger anwendet. Der Grund für die Verschiedenheit der Methoden liegt augenscheinlich in der Art, in dem Charakter des Wildes: die Lebensart des Wildes bestimmt seine Jagdmethode.

Entsprechendes gilt auch für die Wissenschaften.

Fassen wir die Geschichtswissenschaft ins Auge. Der Geschichtsforscher sucht nach Dokumenten, prüft ihre Echtheit, vergleicht sie. Er versucht, in das Seelenleben der Persönlichkeiten sich einzuleben, um ihre Taten zu verstehen. Er untersucht die Kulturzustände der Völker: ihre staatlichen Formen, ihr häusliches und bürgerliches Leben, ihre Religionen, ihren Handel und Verkehr, ihre Kenntnisse und Fertigkeiten, um daraus wieder Einsicht in den Ursprung, den Verlauf und die Folgen der äußeren Ereignisse zu gewinnen.

Halten wir daneben den Physiker. Er beobachtet das Steigen oder Fallen der Quecksilbersäule im Thermometer, den Ausschlag der Nadel im Voltmeter, den Winkel eines Lichtstrahles mit einer Ebene, die Wellenlänge von Spektrallinien usw. Er berechnet seine Versuche, faßt sie mit anderen zusammen, leitet aus ihnen allgemeine Gesetze ab und sucht Versuchsergebnisse im voraus aus Gesetzen zu bestimmen.

Man sieht: der Geschichtsforscher und der Physiker arbeiten mit total verschiedenen Methoden. Diese Methoden in ihrer Gesamt-
…ind charakteristisch für ihre Wissenschaften. Es kann natür-
…ier wie in anderen Wissenschaften vorkommen, daß eine

Methode der einen in der anderen benutzt wird. Je nachdem z. B. ein Schriftstück auf seine Echtheit geprüft wird, sind physikalische oder chemische Untersuchungen des Papiers oder der Schrift nötig. Aber dadurch wird die gebrauchte physikalische oder chemische Methode keine geschichtliche Methode. Es ist das nur eine Anleihe, die die Geschichtswissenschaft gelegentlich bei Physik und Chemie wie bei anderen Wissenschaften machen muß. In ihrer Gesamtheit sind die Methoden einer Wissenschaft typisch für sie.

Man könnte also die Wissenschaften nach ihren Methoden charakterisieren. Ganz zweifellos geht das. Aber man kann auch noch tiefer dringen und sich fragen, worin denn die Verschiedenheit der Methoden ihren Grund hat. Es gibt nun nichts anderes, worin sie begründet sein könnte, als die Verschiedenheit der *Gegenstände*, mit denen sich die Wissenschaften beschäftigen. Der Geschichtsforscher stellt den einmaligen individuellen Verlauf solcher Ereignisse unter den Menschen dar, die auf Kulturwerte bezogen sind. Der Physiker hat es mit den meßbaren Energien der Natur zu tun, deren Wanderungen und Wandlungen überall im Raum und in der Zeit nach denselben Gesetzen vor sich gehen. Diese totale Verschiedenheit der Gegenstände bedingt eine Verschiedenheit der Methoden ihrer Untersuchung. Das, was die Wissenschaften im tiefsten Grunde unterscheidet, was typisch für sie ist, was ihnen ihren Charakter aufprägt, ist also ihr Gegenstand.

Das gilt auch für die Mathematik und ihre Unterschiede von den übrigen Wissenschaften.

Die Mathematik ist ohne Zweifel durch ihre Methode charakterisiert. Der Mathematiker hat sich nicht um Dokumente, Personen, Völker, Kulturformen, nicht um Vorgänge in der Körperwelt zu kümmern. Was irgendwie mit dem Ablauf der Erfahrung zu tun hat, läßt ihn ganz kühl. Er setzt eine Reihe von Sätzen an die Spitze seiner Wissenschaft, und daraus folgt alles übrige mit eiserner Konsequenz, mit einer so unheimlichen Konsequenz, daß man mit Recht sagen kann, die Formeln seien oft klüger als der Mensch, der sie gefunden hat.

Wir wollen zweierlei dabei nicht übersehen. Zunächst mag es vielleicht noch andere Wissenschaften geben, die eine ähnliche Methode befolgen, die sich auch um alles, was Erfahrung heißt, nicht kümmern. Wir fragen hier nicht danach, denn wir sind sicher, daß sich bei näherem Zusehen doch charakteristische Unter-

schiede herausstellen werden, oder, wenn das nicht der Fall ist, daß sie dann zur Mathematik gehören. Zweitens dürfen wir nicht vergessen, daß der Mathematiker zwar einer Spinne gleicht, die ihr Gespinst aus sich heraus spinnt, daß aber die Spinne vorher gefressen haben muß, um den Spinnstoff produzieren zu können. Der Mathematiker hat auch Hilfe von außen nötig. Diese Hilfe ist mitunter recht grob und deutlich gewesen. Die Geschichte der Mathematik im Altertum lehrt, wieviele mathematischen Probleme durch praktische Aufgaben des täglichen Lebens und des Kultus entstanden sind; die Anfänge der Mathematik gehen überhaupt von den praktischen Interessen ackerbau- und handeltreibender Bevölkerung aus. Aber die Methode der Mathematik ist davon unabhängig. Um den Inhalt eines Rechtecks oder Dreiecks zu finden, braucht man keine Bauernfelder, ja nicht einmal fein gezeichnete Figuren zu messen. So sehr also die Mathematik auch heute noch Anregungen von „außen" erhält, ihr „Wesen" wird davon nicht berührt.

Wir bleiben also dabei, daß ihre Methode für die Mathematik charakteristisch ist. Aber die Methode muß sich nach dem Gegenstande richten. Sein Charakter bedingt den Typus der Methode. Das, was die Mathematik also im Grunde charakterisiert, ist ebenfalls ihr Gegenstand.

Um ein Verständnis dafür zu gewinnen, was die Mathematik eigentlich tut, was für eine Art von Wissenschaft im Unterschiede zu anderen sie ist, erheben wir deshalb die Frage nach dem Gegenstande der Mathematik und wollen in dieser Schrift versuchen, die ersten und wesentlichsten Kenntnisse von dem Typus dieses Gegenstandes zu erhalten.

I. Von den Gegenständen überhaupt

2. Was ist ein Gegenstand? Wir müssen zunächst einiges über die Gegenstände überhaupt hören und erhalten dadurch zugleich eine grundlegende Charakterisierung des Gegenstandes der Mathematik.

Unsere erste Aufgabe ist die Beantwortung der Frage: Was ist ein Gegenstand?

Eigentlich schließen es unsere bisherigen Ausführungen schon aus, aber ich will es trotzdem noch ausdrücklich betonen, daß wir

das Wort „Gegenstand“ nicht im Sinne des gewöhnlichen Lebens nehmen, wo Tische, Stühle, Kleider, Bücher usw Gegenstände sind. Gegenstände in dem Sinne, in dem wir sie hier verstehen, sind wohl *auch* solche Dinge, aber *nicht nur* solche Dinge.

Wir bezeichnen als Gegenstand alles, was gedacht werden kann. Man muß diese Definition zwei- und dreimal lesen, um ihre Weite würdigen zu können. Man nehme ein Konversationslexikon mit beliebig vielen Bänden: Jedes seiner Stichworte bezeichnet einen Gegenstand, und wir sind überzeugt, daß damit das Heer der Gegenstände nicht erschöpft ist. Auch der Begriff „Gegenstand“ kann natürlich ein Gegenstand sein, er ist es z. B. in diesem Kapitel, weil darin von den Gegenständen überhaupt gehandelt wird.

Um noch eine andere Definition geben zu können, sind einige Vorbemerkungen nötig. Immer, wenn der Mensch denkt, erkennt, dann urteilt er. Das Erkennen ist stets ein Urteilen. Ein bloßes Sehen, Hören, überhaupt Wahrnehmen, ist noch kein Erkennen, sondern nur die Reaktion auf einen Reiz. Gewiß ist mit dem Wahrnehmen fast immer ein Urteil verbunden, ohne daß wir es beachten. Es braucht also auch kein formuliertes Urteil zu sein; es genügt das Wissen. Jedenfalls liegt der Sachverhalt des Erkennens nur im Urteil vor. Nun unterscheidet die landläufige Logik — sie genügt uns vorläufig — im allgemeinen bei jedem Urteil Subjekt, Prädikat und Kopula. In dem Urteil „diese Rose ist rot“ ist „diese Rose“ Subjekt, „rot“ Prädikat und „ist“ die Kopula. Das, von dem in dem Urteil etwas ausgesagt wird, ist das Subjekt.

Nun können wir definieren: *Gegenstand ist alles, was Subjekt eines Urteils werden kann.*

Man wird den Unterschied unserer beiden Gegenstandsdefinitionen mehr fühlen als sehen. Es ist ein sehr wichtiger vorhanden. Es könnte nämlich so aussehen, als ob wir mit dem, was „gedacht werden kann“, nur die *wirklichen* Gegenstände meinten, die *unwirklichen* aber ausschließen wollten. Das wäre aber ein Irrtum. Das Subjekt eines Urteils kann hinsichtlich seines Wirklichseins bejaht oder verneint werden, es kann von ihm ausgesagt werden, was immer man will — das alles geht uns nichts an; als Subjekt eines Urteils ist es ein Gegenstand. Man sieht also: Die zweite Definition ist nicht richtiger als die erste, aber sie ist vorsichtiger, indem sie keinen Anlaß zu falschen Deutungen gibt.

3. Die sinnlichen Gegenstände. Unsere zweite Aufgabe ist, die Gegenstände zu klassifizieren. Das erscheint bei der unübersehbaren Mannigfaltigkeit der Gegenstände schwieriger, als es ist. Wir setzen zunächst voraus, daß *alle* Gegenstände Wirklichkeit haben und daß sie sich nur durch die Art oder Form ihrer Wirklichkeit, ihre *Wirklichkeitsform*, unterscheiden. Dann zerfallen alle Gegenstände in drei Klassen: a) die sinnlichen, b) die übersinnlichen, c) die unsinnlichen Gegenstände. Ich lasse die Frage offen, ob die fortschreitende Wissenschaft nicht noch neue Klassen von Gegenständen aufdecken wird. Wir besprechen die einzelnen Klassen besonders.

a) Die sinnlichen Gegenstände. Hierher gehört zunächst einmal, wie das Wort schon besagt, alles, was wir durch die Sinne wahrnehmen. Nur darf man das Wort „Sinne“ nicht im einfach menschlichen Verstande nehmen, sondern muß darunter die durch die Apparate der Wissenschaft verschärften Sinne verstehen. Während der Mensch mit wenigen Sinnen arbeitet, arbeitet die Wissenschaft mit tausend Sinnen. Was unseren Sinnen unzugänglich ist, z. B. elektrische Wellen, nehmen unsere Apparate wahr. Alles das, was durch unsere Sinne oder Apparate wahrnehmbar ist oder wahrnehmbar wäre, wenn wir die entsprechenden Sinne hätten oder die nötigen Apparate bauen könnten, nennen wir die physischen Gegenstände. Aber damit ist die Menge der sinnlichen Gegenstände nicht erschöpft. Auch das Seelenleben gehört dazu, also Empfindungen, Vorstellungen, Gefühle, Willensvorgänge und was man sonst noch als Seelisches oder Psychisches bezeichnen mag, kurz alles das, womit sich die Wissenschaft der Psychologie beschäftigt. Denn physische und psychische Gegenstände treten uns in der Erscheinung (phänomenologisch) mit derselben Unmittelbarkeit der Existenz entgegen. Zusammenfassend können wir sagen: Zur ersten Klasse gehören die physischen und psychischen Gegenstände der tatsächlichen und der möglichen Wahrnehmung und Erfahrung.

Welches ist die *Wirklichkeitsform* dieser Gegenstände? Dreierlei ist für sie charakteristisch: 1. Das *Sein.* Die sinnlichen Gegenstände *sind.* 2. Die *Zeitlichkeit.* Sie stehen alle unter der Herrschaft der Zeit. 3. Die *Realität*; das soll heißen: sie wirken kausal [...]nander. In den Streit über das Kausalitätsproblem wollen [...] damit nicht eingreifen, sondern nur den allgemeinen Kausal-

begriff nehmen, den die Naturwissenschaft auch anerkennt, weil sie ihn nötig hat. Die Wirklichkeitsform der sinnlichen Gegenstände ist also *das zeitliche reale Sein.*

4. **b) Die übersinnlichen Gegenstände.** Zu ihnen gehört alles das, zu dessen Annahme man, von den sinnlichen Gegenständen ausgehend, durch Schlüsse kommen kann und das prinzipiell nicht Gegenstand möglicher sinnlicher Wahrnehmung oder Erfahrung ist. Die übersinnlichen Gegenstände bilden also ein Reich der Vermutungen, der Wahrscheinlichkeit, der Hypothesen im weitesten Sinne des Wortes. Zu ihnen gehören z. B. das Ding an sich, die Substanz, die Monade, das Lebensprinzip, die absoluten Raumfaktoren usw. Auch die substantielle „Seele" ist ein übersinnlicher Gegenstand; denn sie ist nichts, was wir erfahren, sondern etwas, was wir der Erfahrung hypothetisch unterlegen.

Auf die Wirklichkeitsform der übersinnlichen Gegenstände näher einzugehen, würde uns zu tief in philosophische Untersuchungen führen, die wir hier besonders deshalb vermeiden, weil uns diese Gegenstände gar nicht mehr weiter beschäftigen werden.

5. **c) Die unsinnlichen Gegenstände.** Das sind für uns die wichtigsten Gegenstände. Aber auch die am schwersten zu charakterisierenden; nicht deshalb, weil ihre Charaktereigenschaften nicht scharf ausgeprägt wären — sie sind wohl mindestens so typisch wie die der anderen —, sondern weil dieser Typus noch sehr wenig in seiner Eigenart erkannt ist. Die unsinnlichen Gegenstände zerfallen in zwei so völlig voneinander geschiedene Klassen, daß man sie als zwei selbständige Klassen neben die beiden bisher besprochenen setzen könnte. Ich will versuchen, von einigen Beispielen aus den Charakter der Gegenstände dieser Klassen zu verdeutlichen.

Wer das Büchlein von Lietzmann über den pythagoreischen Lehrsatz[1]) durchliest, wird diesen Satz in allen möglichen Formen und Beziehungen ausgesprochen finden: bald in Worten, bald in Formeln, bald in Figuren, in Verbindung mit der Ähnlichkeitslehre, mit der Funktionentheorie, mit dem großen Fermatschen Satz. Dutzende Male beim Lesen des Büchleins wird ihm also der

[1]) W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz, 1912 (Math.-physikal. Bibl. Nr. 3).

Satz gegenwärtig, aber immer aus anderer Veranlassung, mit anderer Begründung, in anderer Einkleidung, in anderem Zusammenhang, und zwar nicht jedem Leser verschieden, sondern jedem, der nur versteht, was gemeint ist, in derselben Weise. Was wir dabei erleben, was psychisch in uns abläuft, die Bewußtseinslage ist in allen diesen Fällen verschieden. Aber „inmitten" dieser verschiedenen psychischen Geschehnisse ist etwas identisch dasselbe: *der Sinn des Lehrsatzes.* Dieses Identische, diesen Sinn *meinen* wir stets. Er ist gewissermaßen etwas Statisches im Dynamischen der psychischen Prozesse beim Lesen des Büchleins. Wenn ich den Lehrsatz zuerst in der Formel lese und dann in Worten, so hat sich das Psychische, das, was in mir vorgeht, vom ersten zum zweiten Falle geändert, aber der Sinn des Satzes ist davon gänzlich unberührt geblieben. Dieser Sinn ist also zweifellos nichts Psychisches. Ebenso zweifellos auch nichts Physisches; denn er ist weder durch die Sinne noch durch Apparate wahrnehmbar. Gehört er vielleicht zu den übersinnlichen Gegenständen? Ebenfalls nicht, denn wir kommen nicht zu ihm durch Schlüsse, die an Physisches und Psychisches anknüpfen; er ist keine Hypothese zur Deutung sinnlicher Gegenstandskomplexe. Er wird einfach *unmittelbar vorgefunden.* Er gehört also jedenfalls zu einer *eigenen* Klasse von Gegenständen, die wir die unsinnlichen nennen wollen. Was hier vom Sinn des pythagoreischen Lehrsatzes gesagt wurde, paßt natürlich auf den Sinn *jedes* Urteils.

Welches ist die Wirklichkeitsform des Sinnes? Zunächst *ist* der Sinn nicht, sondern er ist stets wahr oder falsch. Das schlichte Sein läßt sich also von ihm nicht aussagen. Lotze hat die glückliche Bezeichnung gefunden: der Sinn *ist* nicht, sondern er *gilt.* Was bei den sinnlichen Gegenständen das Sein ist, ist beim Urteilssinn das Gelten. Fürs zweite haben wir schon erkannt, wie der Sinn über dem zeitlichen Ablauf unberührt, als etwas *Zeitloses* steht. Die Wirklichkeitsform des Sinnes ist also das *zeitlose Gelten.* Indes bedarf die Zeitlosigkeit noch einer genaueren Charakteristik. Es geht nicht an, vom Urteilssinn zu sagen: er gilt jetzt und jetzt und jetzt. Er hat nicht einmal angefangen zu gelten und wird nicht einmal aufhören zu gelten. Er gilt nicht immer, er gilt einfach. Er steht also als etwas *Ewiges* dem Zeitlichen gegenüber.

Es ist nicht schwer, noch andere Gegenstände vom gleichen Typus aufzufinden. Der Urteilssinn ist durch den Gegensatz

wahr — falsch charakterisiert. So werden denn wohl auch das Schöne und das Häßliche, das Gute und das Schlechte, das Heilige und das Unheilige Klassenbezeichnungen für Gegenstände desselben Typus sein. In der Tat läßt sich zeigen, daß auch die Wirklichkeitsform dieser Gegenstände das zeitlose Gelten ist. Wie wir sehen, tritt das Gelten in verschiedenen Formen auf: als Wahrsein, Falschsein, Schönsein usw. Wir haben damit schon einen allgemeinen Begriff des Geltens eingeführt, den wir beibehalten wollen. Der Sinn des Urteils $2 + 3 = 7$ ist falsch, aber er gilt auch, nur umgekehrt wie der Sinn des Urteils $2 + 3 = 5$. Das Nichtgelten ist auch ein Gelten. Wir fassen es deshalb mit unter diesen Begriff und unterscheiden ein positives und negatives Gelten.

Wir wollen noch für alle Gegenstände dieses Typus ein kurzes Wort einführen. Wir nennen alles, was gilt, und nur das, was gilt, einen *Wert*. Ich betone also auf das nachdrücklichste, daß Wert nicht im Sinne des gewöhnlichen Lebens verstanden ist. Im gewöhnlichen Leben bezeichnet Wert die *Eigenschaft* eines Objektes, wegen der wir das Objekt schätzen, begehren, hochhalten, erstreben, werten. Von alledem liegt nichts in unserem Begriff. Jeder Gegenstand, der die eigenartige Wirklichkeitsform des *Geltens* hat, *ist* in unseren Augen ein Wert. Die Werte sind durchaus selbständige Gegenstände. Schon allein durch ihre völlige Fremdheit gegenüber der Zeit ist ihre absolute Unabhängigkeit von allem erwiesen; nach (6) sind sie also auch wirkliche Gegenstände. Darin liegt der tiefste Grund, warum es falsch ist zu sagen, Wert sei immer Wert für ein Subjekt; es gäbe also keine Werte, wenn keine Subjekte existierten. Hier spielt noch der populäre Wertbegriff hinein, der natürlich nur Werte für ein Subjekt kennt. Die Werte in unserem Sinne sind eine Welt in sich selbständiger, auf nichts anderes neben ihnen angewiesener Gegenstände.

Wir kommen zur zweiten Klasse der unsinnlichen Gegenstände. Wir rechnen dazu z. B. den Punkt, die gerade Linie, die Fläche, den Kreis, den dreidimensionalen Raum, die Zahl, also die Gegenstände, mit denen die Mathematik sich beschäftigt. Es ist zunächst klar, daß sie nicht zu den sinnlichen Gegenständen gehören; denn sie sind doch offenbar nichts Physisches oder Psychisches, sie sind nicht erfahrbar und wirken nicht kausal aufeinander. Aber auch zu den übersinnlichen darf man sie nicht schlagen;

denn sie werden nicht hypothetisch als eine reale Ergänzung der sinnlichen Gegenstände aufgestellt. Ebensowenig darf man sie zu den geltenden Gegenständen zählen. Sie gelten offenbar nicht, sondern sie *sind*. Mit Rücksicht darauf, daß sie zwar sind, aber nicht wirken, nennen wir sie *ideal*. Eines aber teilen sie mit den geltenden Gegenständen; sie sind nämlich wie diese *zeitlos*. Die mathematischen Gegenstände ändern sich nicht mit der Zeit. Indes bedeutet Zeitlosigkeit hier nur Unabhängigkeit von Veränderung; die mathematischen Gegenstände sind immer gleich. Die Wirklichkeitsform der mathematischen Gegenstände ist also das *zeitlose ideale Sein*. Damit haben wir eine erste Charakteristik dieser Gegenstände gewonnen. Tiefer in ihren Typus hinein werden uns die späteren Überlegungen führen.

Außer den mathematischen Gegenständen gehören in unsere Klasse noch weitere, z. B. die Relationen, die Wortbedeutungen.

6. Wirkliche und unwirkliche Gegenstände. Übersicht. Der besprochenen Einteilung der Gegenstände ist nun aber eine andere überlagert, wenn wir die Voraussetzung von (3) fallen lassen, daß *alle* Gegenstände Wirklichkeit besitzen. Es gibt nämlich wirkliche und unwirkliche Gegenstände. Diese Begriffe werden in verschiedenem Sinne gebraucht. Wir wollen unter unwirklichen Gegenständen solche verstehen, die *nur* Inhalte des individuellen Subjektes sind. Damit das Wort „Inhalt" nicht mißdeutet wird, sei beispielsweise bemerkt, daß nicht eine Vorstellung, wohl aber das, was eine Vorstellung vor uns stellt, also das Vorgestellte, Inhalt des Subjektes ist. Zu den wirklichen Gegenständen gehören also ganz sicher diejenigen, die vom individuellen Subjekt vollständig unabhängig sind. Das genügt für unsere Zwecke.

Die unwirklichen Gegenstände sind auch das, was man im eigentlichen Sinne als *Gedankendinge* bezeichnen kann. Sonstige Gegenstände Gedankendinge zu nennen, ist, wie wir nun wissen, wissenschaftstheoretisch durchaus falsch.

Nehmen wir jetzt wieder auf die Scheidung in wirkliche und unwirkliche Gegenstände keine Rücksicht, so gestaltet sich die Übersicht über das Gesamtgebiet der Gegenstände schematisch so:

1. Die sinnlichen Gegenstände. Wirklichkeitsform das reale zeitliche Sein.
2. Die übersinnlichen Gegenstände.

3. Die unsinnlichen Gegenstände:
   a) Die Werte. Wirklichkeitsform das Gelten.
   b) Die idealen Gegenstände. Wirklichkeitsform das ideale zeitlose Sein.

7. Kategorien. Wir haben in den Wirklichkeitsformen gewisse allgemeinste Gegenstandsbestimmtheiten hervorgehoben, aber nur diejenigen, die den Gegenständen jeder Klasse gemeinsam sind, z. B. das Sein, die Zeitlichkeit, die Realität bei den sinnlichen Gegenständen, die Zeitlosigkeit und das Gelten bei den Werten. Man sieht aber leicht, daß wenigstens die eine oder andere unserer Klassen noch Gegenstände von verschiedenem Typus in sich vereinigt, z. B. die Klasse der ideal seienden Gegenstände umfaßt die mathematischen Gegenstände, die Relationen, wahrscheinlich die Wortbedeutungen und vielleicht noch andere. Solche verschiedenen Typen von Gegenständen müssen natürlich wieder durch allgemeinste Bestimmtheiten unterschieden sein, die wir zum Teil noch kennen lernen werden. Wir nennen nun solche allgemeinsten Gegenstandsbestimmtheiten, die letzte, nicht mehr definierbare, nicht mehr in Elemente zerlegbare Begriffe darstellen, *Kategorien*. Weiter auf die logische Bedeutung der Kategorien einzugehen, liegt außerhalb unserer Aufgabe.

Noch zwei Bemerkungen seien gestattet.

Zunächst können wir jetzt das Problem dieser Schrift so formulieren: wir wollen die typischen Kategorien der mathematischen Gegenstände aufsuchen.

Fürs zweite wissen wir ja jetzt, daß jeder Gegenstandstyp auch seine eigenen Kategorien hat, die für ihn und nur für ihn charakteristisch sind. Man kann also mit einer einzigen, einheitlichen Kategorientafel nicht die ganze Wirklichkeit erfassen, sondern muß jeden Gegenstandstyp auf die ihm eigenen Kategorien studieren.

II. Mathematik, Logik, Psychologie

8. Mathematik und Logik. Bevor wir die bisherige Charakteristik der mathematischen Gegenstände erweitern und vertiefen, müssen wir zur Vorbereitung darauf die Hilfsmittel, die uns der vorstehende Abschnitt an die Hand gegeben hat, benutzen, um die Mathematik gegen einige andere Wissenschaften scharf abzugrenzen.

Zunächst sind wir jetzt imstande, die Gebiete der Logik und der Mathematik voneinander zu scheiden. Es ist das bisher eine der schwierigsten Aufgaben gewesen. Vielfach waren und sind Mathematiker und Philosophen der Meinung, daß die Mathematik ein spezieller Fall der Logik sei. So behauptet z. B. Couturat[1]), daß die Mathematik „im Hinblick auf die Form identisch mit der Logik ist, im Hinblick auf den Inhalt dagegen nur ein besonderes Gebiet in dem Anwendungsbereich der Logik darstellt". Und Wundt[2]) sagt: „Daraus geht zugleich hervor, daß die Logik die allgemeinere Wissenschaft ist, welche die Mathematik als eine spezielle Disziplin einschließt. Sie verwandelt sich in Mathematik, sobald die Begriffe die Eigenschaft annehmen, nach Zahlverhältnissen meßbar zu werden."

Wir lehnen diese Auffassung ab. Wir haben im vorhergehenden schon, ohne es zu sagen, den Gegenstand der Logik von dem der Mathematik geschieden. Als ersten Typus der unsinnlichen Gegenstände fanden wir den Sinn des Urteils. Da haben wir bereits den Gegenstand der Logik. Logik ist die Wissenschaft vom Urteilssinn, seinen Elementen, seinen Formen und Beziehungen. Es gibt gar keinen anderen Gegenstand, der Gegenstand der Logik sein könnte, und alles, was die bisherige Logik behandelt hat, fügt sich dem ein. Die Logik ist also Wissenschaft von etwas Geltendem. Es ist zweifellos gegenüber dem mathematischen ein ganz anderes Reich, das sich in der Logik auftut. Ihre Gegenstände unterscheiden sich so voneinander, wie sich Gelten vom Sein unterscheidet. Logik und Mathematik sind *toto coelo* verschiedene Gebiete.

9. Die Logistik. Gegen dieses Ergebnis scheint die Existenz einer Wissenschaft zu sprechen, die man „symbolische", „mathematische", „algebraische" oder „algorithmische" Logik, auch „Algebra der Logik" oder „Logistik" nennt. Weil sie es ist, die man gerade auf mathematischer Seite als die vollendetste Form der Logik und als die Grundlage der Mathematik anzusehen pflegt, so müssen wir ihr eine kurze Besprechung widmen.

Die Logistik will die Logik „im herkömmlichen, klassischen Sinne des Wortes" fassen als „normative Wissenschaft der for-

---

[1]) Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, 1908, S. 230.

[2]) Wundt, Logik I³, 1906, S. 245.

malen Gesetze richtigen Denkens" [1]). Sie zerlegt die Logik, abgesehen von der Methodologie, in drei Teile: den Urteilskalkul, den Klassenkalkul und den Relationskalkul.

1. Urteilskalkul. Mit Recht faßt sie die Lehre vom *Urteil* als den grundlegenden Teil der Logik auf. Die Grundrelation, in der Urteile stehen können, ist die Implikation (die Abhängigkeitsbeziehung). Bezeichnet man die Urteile mit großen Buchstaben, dann soll die Formel der Implikation sein

$$A < B,$$

in Worten: entweder ist A falsch oder B wahr, oder auch: wenn A richtig (falsch) ist, ist auch B richtig (falsch). Die wesentlichsten Verbindungen zwischen Urteilen und in Urteilen werden durch die Worte „oder" und „und" hergestellt. Die erste ist die logische Summe, die zweite das logische Produkt. Die logische Summe wird mit $A + B$ bezeichnet und bedeutet: A oder B ist richtig. Das logische Produkt AB sagt aus: A und B sind richtig. Zwei Urteile A und B sind gleich, wenn A B oder B A impliziert, in der Formel

$$(A = B) = (A < B)(B < A).$$

Ist 1 das Symbol für das Wahre, 0 das Symbol für das Falsche und bezeichnen wir die Verneinung eines Urteils A durch $\overline{A}$, so ist die Verneinung definiert durch die gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$A\overline{A} = 0, \qquad A + \overline{A} = 1.$$

Diese beiden Gleichungen stellen, wie man ohne weiteres sieht, die Sätze des Widerspruchs und des ausgeschlossenen Dritten, auf Urteile angewandt, dar. Dazu kann man noch den Satz der Identität

$$A < A$$

fügen. Um nun logisch deduzieren zu können, bedarf man einiger Grundsätze. Die wichtigsten sind der Grundsatz des Syllogismus und der Deduktion. Der erste lautet in der Formel

$$(A < B)(B < C) < (A < C),$$

---

[1]) Couturat in der Enzyklopädie der philos. Wissenschaften, 1. I l. 1912, S. 138.

der zweite in Worten: Wenn A B impliziert und A wahr ist, so ist B wahr. Jetzt sind die Gesetze der Multiplikation und Addition beweisbar, z. B. das Gesetz der Kommutation

$$AB = BA \qquad\qquad A + B = B + A,$$

das Gesetz der Assoziation

$$(AB)C = A(BC) \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Mit Hilfe dieser und anderer Formeln lassen sich Regeln herleiten, die gestatten, eine Implikation in eine Gleichheit zu verwandeln, deren eines Glied 0 oder 1 ist, ferner mehrere Gleichheiten auf eine zu reduzieren. Da nun eine logische Deduktion ja eine Folge von Implikationen ist, lassen sich die Prämissen einer solchen Deduktion als eine Gleichung mit einer oder mehreren Unbekannten darstellen, aus der man unter Anwendung gewisser Regeln alle Folgerungen ziehen kann, die möglich sind.

2. Klassenkalkul. Wenn man in dem Urteil „Peter ist ein Deutscher“ für „Peter“ den Buchstaben x setzt, dann lautet der Satz „x ist ein Deutscher“. Das ist kein Urteil mehr, sondern wird erst zu einem Urteil, wenn man für x bestimmte Personen einsetzt oder, wie die Logistik in Anlehnung an die Mathematik sagt, dem x bestimmte Werte gibt; das Wort „Wert“ ist natürlich hier nicht im Sinne von (5) gebraucht. Ein solches Gebilde nennt man urteilsmäßige Funktion (Satzfunktion). x ist die Variable. Sei nun φx eine solche Funktion der Variabeln x. Sie ist ein Urteil für jeden Wert von x, ist also gültig für gewisse Werte von x (August, Paul, Eduard usw in dem obigen Beispiel), ungültig für andere (Jean, Bertrand, Angelo usw). Somit bestimmt die Funktion eine *Klasse*, d. h. die Gesamtheit der Werte, die sie bestätigen (in dem obigen Beispiel die Klasse der Deutschen). Die Klasse schreibt man im Symbol

$$x \ni \varphi,$$

d. h. die Gesamtheit der x, die φx befriedigen. Das Symbol $\ni$ verwandelt also eine Funktion in eine Klasse und ein Urteil in einen Begriff (der in der Logistik stets seinem *Umfang* nach, als Klasse, auftritt). Das entgegengesetzte Symbol ε verwandelt eine Klasse in ein Urteil. $k \varepsilon a$ bedeutet: k (ein bestimmtes Individuum) gehört zur Klasse a.

Jeder Implikationsbeziehung zweier Urteile entspricht eine Inklusionsbeziehung ihrer Klassen (Klasse a ist in Klasse b eingeschlossen). Deshalb braucht man für die Inklusion dasselbe Zeichen $<$. Wegen dieser Analogie ist die Klassenrechnung formell gleich der Urteilsrechnung, nur mit entsprechend geänderter Interpretation. So ist z. B. die logische Summe zweier Klassen auf folgende Weise bestimmt:

$$a + b = x \ni [(x \varepsilon a) + (x \varepsilon b)],$$

oder das logische Produkt durch

$$ab = x \ni [(x \varepsilon a)(x \varepsilon b)].$$

3. Relationskalkul. Das meiste, was wir bisher ausgesagt haben, betraf *Relationen.* So spielt die Relation eine überaus große Rolle in unserem Denken. Der Relationskalkul studiert die Relationen im allgemeinen. Eine (zweigliedrige) Relation zwischen x und y stellt man dar durch xRy. Natürlich kann eine Relation beliebig viele Glieder haben. Die Grundbeziehungen zwischen Relationen sind die der Inklusion und der Gleichheit. Eine Relation R_1 ist in einer Relation R_2 enthalten, wenn in allen Fällen, wo R_1 in einem Wertsystem auftritt, auch R_2 darin auftritt. R_1 ist gleich R_2, wenn sie einander enthalten.

Die wichtigste Operation der Relationsrechnung ist die relative Multiplikation: hat man zwischen x, y, z die Relationen xRy und yRz, so besteht zwischen x und z eine dritte Relation, die durch die beiden anderen bestimmt ist und das relative Produkt von ihnen genannt wird.

Die Relationen lassen sich auf verschiedene Weise einteilen. Eine Relation ist symmetrisch, wenn xRy gleich yRx ist, nichtsymmetrisch, wenn durch die Umkehrung eine neue, mit der ersten verträgliche Relation entsteht, asymmetrisch, wenn niemals zugleich xRy und yRx ist, wenn also durch die Umkehrung eine neue, mit der ersten unverträgliche Relation entsteht.

Eine Relation ist transitiv, wenn aus xRy und yRz für x und z dieselbe Relation R folgt, nichttransitiv, wenn daraus eine neue, mit der ersteren verträgliche, intransitiv, wenn daraus eine neue, mit der ersteren unverträgliche Relation folgt.

Dann spricht man z. B. noch von eindeutigen, umgekehrt eindeutigen und eineindeutigen Relationen, von denen wir die letzteren später (31) kennen lernen werden.

Die Relationen werden analogen Operationen unterworfen wie die Urteile und Klassen.

10. Logik, Relationstheorie und Mathematik. Diese ganz flüchtigen Andeutungen genügen, um die Probleme der Logistik und die Art ihrer Behandlung zu zeigen. Sie genügen aber auch zur Beurteilung, die wir in drei Punkten zusammenfassen.

1. Der Kalkul der Urteile und der Klassen gehört in die Logik hinein, soweit es sich dabei um Anwendungen der Relationstheorie auf logische Gegenstände handelt. Aber weil die Logistik die Form ihrer Behandlung der mathematischen analog wählt, faßt sie ausschließlich die *formale* Seite der Urteile und Begriffe. Infolgedessen drückt sie manches schärfer und allgemeiner aus, als die sonstige Logik es kann, enthält aber auch vieles der Logik völlig Gleichgültige und hat auch nicht eine einzige neue logische Erkenntnis von Bedeutung gewonnen. Das wichtigste aber ist, daß sie sich dadurch selbst von der Einsicht in den eigentlichen Gegenstand der Logik, den Sinn des Urteils, vollständig abschließt. Es ist also durchaus nicht so, daß die Logistik etwas anderes unter Logik versteht, als es die sonstige Logik tut, sondern so, daß sie denselben Gegenstand behandeln will, aber vermöge der Form, die sie benutzt, nur seine formale Seite sieht und ausdrücken kann.

2. Die originale und bedeutendste Leistung der Logistik ist die Relationstheorie. Sie gehört aber ohne jeden Zweifel nicht in die Logik hinein. Denn die Relationen sind Gegenstände eines Gebietes, das durch die Kategorie des idealen Seins scharf von dem Geltungsgebiet der logischen Gegenstände getrennt ist (5). Man muß übrigens beachten, daß die Klasse, deren Begriffsumfang größer ist als der Begriffsumfang des Begriffs, auch zu den Gegenständen des Relationsgebietes gehört [1]; das geht schon daraus

[1] Wenn man in der *Relation* R $(a, b, c \ldots)$ von R absieht, so hat man die *Klasse* oder *Menge* $(a, b, c \ldots)$. Man beachte, daß allein schon die in dem Wörtchen „und" liegende Relation zur Herstellung einer Menge genügt. Diese Relation steckt aber in jeder anderen Relation; denn jede Relation besitzt begriffsnotwendig wenigstens zwei Fundamente (13), die natürlich im Grenzfall auch identisch sein können, und jede sagt etwas aus über a und b und c usw. Die Relation „und" oder ein sie enthaltender oder ersetzender Ausdruck, z. B. „alle" oder ein Zeichen

hervor, daß die Klassen mit den Relationen die grundwesentliche Beziehung der Inklusion teilen. Selbstverständlich befaßt sich die Logik mit den Gegenständen des Relationsgebietes hinsichtlich ihrer kategorialen Struktur und der Art ihrer wissenschaftlichen Bearbeitung — eine Aufgabe, die die Logistik eben wegen ihrer Form nicht sieht, trotzdem sie die Relationstheorie zur Logik rechnet —; aber diese Aufgabe hat die Logik gegenüber den Gegenständen *aller* Gebiete. Die Relationstheorie steht also zur Logik durchaus nicht anders als jede andere Wissenschaft. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß ihre Resultate für die formale Seite der Logik Bedeutung besitzen. Ich schließe noch die Bemerkung an, daß die Relationstheorie *wirkliche* Gegenstände behandelt; denn die Relationen bestehen offenbar auch dann, wenn wir nicht um sie wissen, sind also von uns unabhängige und deshalb nach (6) auch wirkliche Gegenstände.

3. Ist die Logistik also die Logik, auf die die Mathematik zurückgeführt werden kann?

Soweit sie wirklich Logik ist, kann die Mathematik nicht darauf zurückgeführt werden und wird sie, wie wir später (31) sehen, auch nicht darauf zurückgeführt.

Aber zur Relationstheorie hat die Mathematik zweifellos innige Beziehungen, weil sie sich mit Relationen zwischen solchen Gegenständen befaßt, die auf demselben Gebiete des ideal Seienden liegen wie die Relationen (5). Unsere weiteren Ausführungen (24, 25, 31, 40) werden deutlich machen, daß die Mathematik ein spezieller Fall der Relationstheorie ist, der eintritt, wenn die Fundamente der Relationen einen bestimmten, später noch näher zu zeichnenden Charakter annehmen. So wird uns in (43) eine klare Einsicht in das Verhältnis von Logik, Relationstheorie und Mathematik möglich.

---

oder ein Gesetz, darf aber auch nicht fehlen, weil sonst die Elemente nicht zusammengehören würden. Die Relation „und" in irgend einer Form ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Menge. Der Mathematiker darf sich nicht daran stoßen, daß das obige Symbol in der Mathematik für bestimmte Mengen, nämlich für die abzählbaren, gebraucht wird. Es gilt hier allgemein; denn jede Menge besteht aus diskreten Elementen und setzt als Zusammenfassung notwendig wenigstens die einfachste Beziehung zwischen den Elementen voraus, die in dem „und" liegt (vgl. 31).

11. Mathematik und Psychologie. Es bleibt noch unsere Aufgabe, die mathematische und psychologische Betrachtung der Gegenstände der Mathematik sorgfältig zu scheiden. Um das Resultat deutlicher zu machen, gehen wir von der entsprechenden Scheidung in einem anderen Bereiche der unsinnlichen Gegenstände aus.

Wie etwas ist und wie etwas geworden ist, sind offenbar zwei ganz verschiedene Fragen. Ein Gebirge in seinem gegenwärtigen Zustand zu beschreiben, ist eine andere Aufgabe, als zu untersuchen, welche vulkanischen, tektonischen und anderen Einflüsse zu seinem Aufbau zusammengewirkt haben. Aber die beiden Fragen hängen doch eng miteinander zusammen. Etwas ist so, wie es ist, nur durch die Art, wie es geworden ist. Bei allem, was in der Zeit steht, ist das Jetzt ja immer nur eine Durchgangsstufe, ein Moment des Werdens, der Entwicklung, die nie abgeschlossen ist. Unsere erste Frage ist, mathematisch gesprochen, nur ein Grenzfall der zweiten, der in ihr eingeschlossen ist. Wie etwas ist, verstehen wir erst ganz, wenn wir wissen, wie es geworden ist.

Es scheint nun aber Verhältnisse zu geben, wo dieser Zusammenhang nicht vorliegt. Nehmen wir ein Drama, etwa Schillers „Wilhelm Tell". Woher Schiller die Tellsage kannte, woher er die Beschreibung der Örtlichkeiten nahm, wer ihm die Vorbilder seiner Personen lieferte, was er zu dem Historischen und Legendarischen hinzugedichtet hat, ob er das Drama in einem Zuge niedergeschrieben oder ob er während eines langen Zeitraumes, dann und wann ansetzend und oft unterbrechend, es zusammengeschweißt hat — alles das ist für das Verständnis des künstlerischen Wertes ganz gleichgültig, es bringt uns diesen Wert nicht im geringsten näher. Es gibt Dramen, wie die Shakespeares, von deren Entstehung wir kaum etwas wissen, die wir nur als reife Früchte kennen —, das tut ihrem künstlerischen Werte nicht den mindesten Abbruch. Oder woher ein Maler das Motiv eines Gemäldes erhalten, welche Technik er gebraucht hat — das Wissen davon macht uns nicht fähig, den künstlerischen Gehalt besser zu verstehen. Aus alledem schließen wir, daß der Wert von der Entstehungsweise eines Kunstwerkes unabhängig

In den beiden Fragen, wie etwas ist und wie etwas geworden bedeutet also hier das „etwas" Gegenstände zweier verschie-

dener Gebiete: in der ersten den Wert, in der zweiten den Träger des Wertes.

Entsprechendes gilt von den anderen geltenden Gegenständen, ist sogar hier für jeden, der im Denken geübt ist, noch deutlicher. Fassen wir noch einmal den pythagoreischen Lehrsatz ins Auge. Wie sich der Satz bei den Indern oder sonstwo entwickelt hat, wie das Verständnis für ihn heute langsam in die Köpfe der Schüler eingeht, davon bleibt sein Sinn vollständig unberührt. Dieser Sinn entwickelt sich nicht. Er bleibt derselbe, auch wenn die Menschen den Satz nie gekannt hätten, noch kennen würden.

Versuchen wir unser Ergebnis zu formulieren, dann können wir sagen: Bei allen geltenden Gegenständen bezieht sich die Entwicklung ausschließlich auf den Träger des Wertes, niemals auf den Wert selbst. Die Werte sind etwas Selbständiges, etwas Unabhängiges uns gegenüber, weil sie etwas Ewiges sind. Sie können sich nicht entwickeln, weil sie nicht in der Zeit stehen. Wir können uns der Werte nur bemächtigen, sie werden nur Werte für uns, indem wir sie an Zeitliches binden. Dieses Bemächtigen der Werte geschieht nicht gleich in vollkommener Weise. Wir — dieses „wir" gilt für jedes Individuum und für die ganze Menschheit — können anfangs nur Teilwerte binden, nur Bruchstücke von ihnen. Das sieht dann so aus, als ob der Wert sich entwickele, während, was sich entwickelt, nur der Träger des Wertes ist. Dieser Träger — das Psychische — ist nicht gleich so vollkommen, daß er den Wert ganz bindet. Das alles ist natürlich im Bilde gesprochen. Träger und Wert sind auf eine einzigartige Weise miteinander verbunden, nicht äußerlich, wie man zwei reale Gegenstände aneinanderbindet. Aber es läßt sich das vorliegende Verhältnis nur mit Hilfe der bildlichen Redeweise einigermaßen verdeutlichen. Es sei nur im Vorübergehen darauf hingewiesen, welche wichtigen Folgerungen unser Ergebnis ziehen läßt. So sind nach ihm z. B. die ethischen und religiösen Werte ganz unabhängig davon, wie sich das Menschengeschlecht entwickelt hat, ob es mit dem Tierreich zusammenhängt oder nicht.

Liegen die Verhältnisse nun genau so bei der zweiten Klasse der unsinnlichen Gegenstände? Oder — wir wollen uns darauf beschränken — liegen sie genau so bei den Gegenständen der Mathematik? Auf den ersten Blick scheinen sie anders zu liegen. Die Wirklichkeitsform der mathematischen Gegenstände steht der

der sinnlichen näher als die Wirklichkeitsform der geltenden Gegenstände. Gegenstände wie gerade Linie, Kreis, Ebene usw sind mit irgend einer Annäherung in der realen Wirklichkeit vorhanden oder können darin realisiert werden. Sinnliche Gegenstände sind zählbar. Das alles scheint darauf hinzudeuten, daß die mathematischen Gegenstände mit der sinnlichen Welt in einer engen Verknüpfung stehen, daß sie von ihr abhängig sind, daß sie verschwinden, wenn die sinnliche Wirklichkeit verschwindet, daß sie also von uns *geschaffen* sind.

Und doch wäre diese Auslegung falsch. Zunächst sind die mathematischen Gegenstände ganz und gar von uns unabhängig. Können wir denn an der Zahl 3 oder an dem Kreis mit dem Radius 5 cm etwas ändern? Hoffentlich wendet man nicht ein, man könne doch die Zahl 3 größer schreiben oder durch Zuzählung einer anderen Zahl verändern. Das erstere wäre nur eine Änderung des sinnlichen Symbols der Zahl 3; im zweiten Falle würde an die Stelle der Zahl 3 eine andere Zahl gesetzt. Es läßt sich keine Weise angeben, wie es uns möglich sein sollte, diese mathematischen Gegenstände zu ändern. Sie würden ja auch in der Zeit stehen, wenn sie sich ändern ließen. In dieser Beziehung sind sie also von uns unabhängiger, als die sinnliche Wirklichkeit es ist.

Ferner tritt uns der mathematische Gegenstandsbereich als ein Reich mit einer eigenen, von uns ganz unbeeinflußbaren Gesetzmäßigkeit entgegen. Es steht genau so wenig in unserem Belieben, die mathematischen Gesetze zu ändern, wie es in unsere Hand gegeben ist, die Gesetze der strahlenden Energie oder die stöchiometrischen Gesetze zu ändern.

Alles das beweist, daß der mathematische Gegenstandsbereich kein von uns geschaffener Bereich sein kann, sondern ein selbständiger, von uns unabhängiger Bereich ist, der nicht verschwindet, wenn die sinnliche Wirklichkeit verschwindet. Auch die mathematischen Gegenstände sind also nach (6) wirkliche Gegenstände.

Zweierlei Richtiges enthält jene Auslegung aber doch.

Erstens gelangen wir nur mit Hilfe der sinnlichen Wirklichkeit zur Kenntnis des mathematischen Gegenstandsbereiches. Bei ihr setzt der Prozeß dieser Erfassung an; ohne sie würde er nicht ausgelöst. *Wie* dieser Prozeß vor sich geht, ist eine Frage, die

zwar nicht zu unserem Thema gehört, über die aber doch einige Bemerkungen angebracht sind. Man denkt sich vielfach diesen Prozeß nach Art der gewöhnlichen (generalisierenden) Abstraktion. Danach entsteht z. B. der Begriff der geraden Linie dadurch, daß wir von den Unterschieden der an sinnlichen Gegenständen vorkommenden Linien in der Breite, Länge, Abweichung von der Geraden usw absehen und so die mathematische Gerade übrig behalten. Aber einmal sind die mathematischen Gegenstände keine Begriffe, sondern Gegenstände, von denen erst wieder Begriffe gefunden werden müssen; man hatte z. B. die Gegenstände „Punkt", „Gerade" schon lange, bevor man einen Begriff davon hatte. Wären sie Begriffe, so gehörten sie zum Bereich der geltenden Gegenstände (28); denn Begriffe sind eine besondere Art von Urteilen. Dann ist aber jener geschilderte Vorgang auch unmöglich. Denn man kann nichts übrig behalten, was gar nicht vorhanden ist; die Linien an den sinnlichen Gegenständen sind ja nicht gerade, sondern nur ungefähr gerade. Jedoch selbst dieses Urteil über die annähernde Geradheit würden wir nicht fällen können, wenn wir nicht schon mit dem Wissen um gerade Linien an die sinnlichen Linien heranträten. Die Erfahrung an sinnlichen Gegenständen kann also nur *ein* Faktor in dem Prozeß der Erfassung mathematischer Gegenstände sein. Der zweite Faktor muß intuitiver Natur sein; es muß eine Art geistiges Schauen, ein unmittelbares Erfassen mit im Spiele sein. Dieser Prozeß ist analog dem der Werterfassung. Auch die mathematischen Gegenstände entwickeln sich nicht; sondern was sich entwickelt, ist unsere Auffassung von ihnen, die langsam immer vollkommener wird.

Zweitens hängen unsere Erfahrungswelt und unsere Mathematik miteinander insofern zusammen, als sie eine gewisse *Zuordnung* zueinander besitzen, die es möglich macht, daß *unsere* Welt durch *unsere* mathematischen Gegenstände in gewissen Zügen *abgebildet* werden kann. Wo und wann immer Wesen in unserer Welt zu mathematischen Gegenständen gelangen, müssen diese Gegenstände dieselben sein wie die unsrigen. Wenn es Marsmenschen gibt und wenn sie Mathematik haben, dann ist es möglich, daß sie weit tiefere Kenntnisse darin besitzen als wir; aber was wir und sie als sichere Ergebnisse haben, kann sich nicht widersprechen. Jedoch erkennende Wesen in einer anders sich [illegible]

bauenden Welt, als es unsere sinnliche Welt ist, können unsere Mathematik nicht erfassen, sondern müssen eine andere haben, falls überhaupt etwas Derartiges zu ihrer Wirklichkeit gehört. Das darf natürlich nicht so verstanden werden, als ob für solche Wesen $2 \times 2 = 5$ oder die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks im euklidischen Raume nicht zwei Rechte wäre. Sondern für solche Wesen sind 2, 5, Dreieck, Ebene, euklidischer Raum unerfaßbare Gegenstände. Der Sinn des Urteils $2 \times 2 = 4$ ist ein ewig geltender Wert und die Zahlen 2 und 4 sind zeitlos seiende, von uns ganz unabhängig existierende Gegenstände. Aber erfaßt können diese Zahlen und deshalb auch jener Sinn nur von solchen Wesen werden, zu deren Welt die Zahlen eine gewisse Zuordnung besitzen. Aus dem mathematischen Gegenstandsbereich wählt *unsere* Erfahrungswelt *unsere* mathematischen Gegenstände aus; eine andere Mathematik ist für uns unerfaßbar. Auch hier haben wir eine Analogie im Wertbereiche. Es gibt ohne Zweifel außer den von uns erfaßbaren logischen Werten noch unendlich viele andere, die für uns deshalb unerfaßbar sind, weil sie mit Hilfe *unserer* Wirklichkeit niemals Werte für uns werden können. Der Sinn des Urteils „Die Rosen gehören zu den zweikeimblättrigen, bedecktsamigen Pflanzen“ gilt unabhängig von jedem Subjekt und jeder Welt; aber im Urteilen erfaßt werden kann dieser Sinn nur von Wesen, in deren Welt es Rosen und sonstige zweikeimblättrige, bedecktsamige Pflanzen gibt.

Sicherlich ist also dem Mathematiker der Bereich seiner Gegenstände *gegeben*[1]). Er schafft sie nicht, sondern er untersucht sie, er erfindet sie nicht, sondern er findet sie, er konstruiert sie nicht, sondern er entdeckt sie (er kann sie wohl mit Hilfe von Konstruktionen entdecken). Er steht in seinem Bereiche nicht wie ein Baumeister in dem unfertigen Hause, sondern wie ein Forscher in fremdem, teils unentdecktem Lande.

Aber nicht nur dem Mathematiker ist dieser Bereich gegeben, sondern damit auch dem Logiker. Auch ihm ist es ganz gleichgültig, wie unsere Kenntnis der Gegenstände der Mathematik entstanden ist. Ihre Bedeutung, ihr Sinn, ihr logischer Charakter ist von dieser Entstehung vollständig unabhängig. Sie stehen nicht in

---

[1]) Gegeben bedeutet hier und später nicht „im Bewußtsein gege[illegible] sondern wird durch die oben folgenden Sätze erklärt.

Zeitpunkten der Entwicklung; sonst wären sie Durchgangsstufen des Entwicklungsprozesses und in ihrem Sein nur ganz begreiflich, wenn wir ihr Werden wüßten. Sondern sie stehen in einem zeitlosen, idealen Dasein und sind in ihm dem Logiker so gut einfach gegeben wie sein eigenes Reich des Sinnes.

12. Übersicht. Worin besteht nun in kurzen Worten die *unterschiedliche Arbeit* des Psychologen, des Mathematikers und des Logikers *in bezug auf die mathematischen Gegenstände?*

1. Der Psycholog untersucht erstens den Bildungsprozeß, der zur Kenntnis der mathematischen Gegenstände führt, und zweitens die psychischen Vorgänge bei der Arbeit des Mathematikers. Ihn interessiert also alles, was unter die Kategorie der Zeitlichkeit fällt.

2. Der Mathematiker sucht die Beziehungen zwischen den mathematischen Gegenständen und neue mathematische Gegenstände.

3. Der Logiker sucht erstens die Kategorien, die für den Bereich der mathematischen Gegenstände typisch sind; zweitens erforscht er die logische Struktur des mathematischen Denkens, d. h. er reiht die mathematische Denkarbeit in die ihm bekannten logischen Formen ein oder stellt neue Formen dafür auf.

III. Was die Zahl nicht ist

13. Fundamente und Relationen. Wir müssen zuerst einige einleitende Überlegungen machen.

Der Mathematiker befaßt sich im allgemeinen nur mit den Relationen zwischen seinen Gegenständen.

Jede Relation muß *Fundamente* haben, d. h. Elemente oder Glieder, zwischen denen sie besteht. Natürlich können Relationen auch selber Fundamente sein, wenn Relationen zwischen Relationen existieren. So drückt beispielsweise eine Determinante oder eine Matrix eine Relation aus. Werden nun Relationen zwischen Determinanten oder Matrizes aufgestellt, so haben wir den Fall, daß die Fundamente aus Relationen bestehen. Es muß aber letzte, absolute Fundamente geben, d. h. solche, die nicht wieder Relationen sind; denn der Begriff der Relation *allein* ist sinnlos, weil wir immer nur von Bezogenem auf Beziehungen kommen können.

Solche absoluten Fundamente sind in der Mathematik die Zahlen und die geometrischen Gebilde. Gewiß lassen sich die geometrischen Gebilde als Punktmengen, also selber wieder als Relationen zwischen Punkten betrachten. Wir werden später (42) sehen, daß das zwar eine Art ist, die geometrischen Gebilde mathematisch vollkommen zu beschreiben, daß aber ihre Gegenständlichkeit dadurch nicht erfaßt wird. Ihr Charakter als Fundamente bleibt unangetastet.

Seine Gegenstände kennt der Mathematiker also nur als Relationsträger. Sie sind für ihn nichts als Gegenstände, die bestimmte Relationen haben können. Sie sind so beschaffen, daß sie diese Relationen haben müssen.

Mit den mathematischen Fundamenten sind demnach die mathematischen Relationen von selbst mitgegeben; die Relationen würden sich ändern, wenn sich die Fundamente änderten. Die Gegenstände bestimmen das Gebiet der Mathematik kategorial. Umgekehrt müssen sich also aus den Relationen die Kategorien dieses Gebietes feststellen lassen. In der Tat charakterisiert der Mathematiker durch die Relationen, die er auffindet, die Gegenstände auch logisch vollständig, nur tut er es nicht unmittelbar, sondern mittelbar. Das Abheben dieses logischen Charakters und sein vergleichendes Studium ist Sache des Logikers. Zu dieser Arbeit wenden wir uns jetzt.

14. Die Zahlen keine Abbilder von sinnlichen Gegenständen. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fundamente der algebraischen Disziplinen (Arithmetik, Algebra, Analysis), mit der Zahl. Was die Zahl nicht ist, wollen wir zuerst sehen. Nicht als ob wir aus dem folgenden Kapitel nicht noch Neues zu dieser Frage lernen könnten. Wir wollen hier nur einige charakteristische falsche Ansichten über das Wesen der Zahl zusammenstellen, um den schwierigen Gedankengang des nächsten Kapitels nicht noch komplizierter zu machen. Vorläufig ziehen wir hauptsächlich bloß die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw in Betracht.

1. Man findet noch vielfach, besonders bei Nichtmathematikern, die Auffassung, die Zahlen und ihre Beziehungen seien Begriffe und demnach Abbilder von sinnlichen Gegenständen. Meistens wird dieser Gedanke sogar noch mehr spezifiziert, indem man die Zahlen als „Abbilder von Objekten oder Beziehungen in der dem

Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt“ faßt, also, in unserer Sprache, als Abbilder von physischen Gegenständen. Zahlen sollen danach immer Zahlen von etwas sein. Die Zahl 1 z. B. meint einen beliebigen Gegenstand, z. B. einen Apfel, ein Buch, einen Menschen, ein Haus. Alle diese Gegenstände — ein Apfel usw — fallen unter den allgemeinen Begriff „Zahl 1“, sie sind Exemplare der Gattung „Zahl 1“, so wie die einzelnen Menschen Exemplare der Gattung „Mensch“ sind. Das Zeichen 1 ist das Symbol für einen Apfel, einen Menschen usw.

Indes verwechselt diese Ansicht die psychologische Fragestellung mit der logischen. Die Zahlen waren einmal im Laufe der Entwicklung ihrer Erkenntnis solche Abbilder, und weil die schulgemäße Darstellung sich oft der historischen Entwicklung anpassen muß, wird auch die *erste* Einführung wohl mit diesem Zahlbegriff beginnen müssen. Aber die logische Charakteristik der Zahl weiß davon nichts.

Das ergibt sich am deutlichsten aus dem Versuch, diese Auffassung praktisch durchzuführen. Das Buch von Färber[1]) versucht das beispielsweise überall, widerspricht sich aber selbst. Färber *will* auch von den irrationalen und den gemeinen komplexen Zahlen zeigen, daß sie Abbilder der „Außenwelt“ seien; er zeigt aber in Wahrheit, daß sie Symbole für *mathematische* Gegenstände (Beziehungen zwischen Linien, Flächen, Körpern, Winkeln usw, ebene Vektoren) sind. Aber schon in den einfachsten Verhältnissen versagt diese Auffassung. Ist in der sinnlichen Wirklichkeit die Gleichung $1 = 1$ möglich? Es gibt doch dort keine absolut gleichen Gegenstände. Und erst die Operationen! Was bedeutet dort $2 + 3 = 5$? Nehmen wir einmal an, sinnliche Gegenstände ließen sich überhaupt als solche addieren, sind sie dann aber zusammen gleich einem neuen, von ihnen verschiedenen Gegenstand? Was entspricht der Operation $1 - 1 = 0$ im Bereiche der „Außenwelt“? Etwa die Handlung, daß ich einen Gegenstand vor mich hinlege und dann wegnehme, oder die andere, daß ich innerhalb eines bestimmten Zeitraumes 1 Mark einnehme und sie wieder ausgebe? Aber die Gleichung besagt doch, daß die beiden 1 sich gegenseitig aufheben und nichts übrig bleibt. Bleibt aber der weggenommene Gegenstand oder die aus-

---

[1]) C. Färber, Arithmetik, 1911.

gegebene Mark nicht dennoch an einer anderen Stelle übrig? Verläuft nicht der physische Vorgang in der Zeit, während die Gleichung einen Bestand ausdrückt? Einerseits besagt die Gleichung mehr, als in der Außenwelt geschieht, andererseits geschieht in der Außenwelt mehr, als die Gleichung besagt. Es ist leicht zu sehen, daß auch die einfache Multiplikation, z. B. $2 \times 3 = 6$, ähnliche Schwierigkeiten in sich birgt. Noch weniger durchführbar wird jene Auffassung, wenn es sich um Bruchrechnung handelt. Was $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$ in der „Außenwelt" symbolisieren soll, ist wohl kaum zu sagen. Und dann die negativen Zahlen! Wie viele Symbolisierungen sind da erfunden worden! Wie viele davon beruhen aber auf der Verwechselung der Operation des Addierens und Subtrahierens mit der Operation, die im Begriffe des Gegensatzes positiv-negativ liegt! Die beste Symbolisierung des Wesens der positiven und negativen Zahlen macht man an der Zahlgeraden, also nicht an einem physischen, sondern an einem mathematischen Gegenstande. Aber selbst mit ihrer Hilfe ist es kaum möglich, die Theorie ganz durchzuführen und z. B. zu beweisen, daß das Produkt zweier negativen Zahlen eine positive Zahl ist. Gibt man das Prinzip der Dingsymbolisierung nicht auf, dann ist es ferner unmöglich zu zeigen, daß z. B. imaginäre Zahlen eine durchaus rechtmäßige Erweiterung des Zahlbereiches sind, daß sie logisch-mathematisch genau dieselbe Existenzberechtigung haben wie die ganzen positiven Zahlen. Wo immer man also im Zahlbereich ansetzt, nirgendwo läßt sich jenes Prinzip retten.

Wenn nun aber die Zahlen keine Dinge zählen, was zählen sie dann eigentlich? Die Antwort werden wir im folgenden Kapitel erhalten.

15. Algebra und Zeit. 2. W. R. Hamilton und neuerdings Mannoury, Cohen u. a. haben versucht, die Zahl oder wenigstens die Mehrheit aus dem Zeitbegriff abzuleiten. Hamilton hat das in die kurze Formel gefaßt: Algebra ist die Wissenschaft von der reinen Zeit[1]). Cohen sieht die Zeit symbolisiert in dem Pluszeichen der Mathematik[2]). Es liegt ein gewisser Reiz in der Symmetrie der Aussage: Die Algebra behandelt die Zeit, die Geometrie den Raum. Wie für die geometrischen Gebilde von allen

Vgl. Voss, Über das Wesen der Mathematik [2], S. 33.
Cohen, Logik der reinen Erkenntnis, 1902, S. 133.

qualitativen Unterschieden abgesehen wird, so daß z. B. zwei gerade Linien sich nur durch ihre Lage im Raume unterscheiden, so sollen auch für die Zahlen alle qualitativen Verschiedenheiten der Vorgänge beiseite gelassen und nur die Aufeinanderfolge in der Zeit betrachtet werden. Aber mit der schönen Symmetrie von Algebra und Geometrie ist es nichts. Für die Geometrie stimmt schon die gegebene Charakterisierung nicht, wie wir noch sehen werden, für die Algebra noch weniger. Wenn nämlich die Algebra in dieser Weise auf der Zeit aufbaute, dann müßte sich die Zeit, wenn nicht in der Zahl, dann doch wenigstens in den Gesetzen der Zahl widerspiegeln.

Indes spiegelt sich die Zeit erstens nicht wider in der Zahl. Die Zahl steht außerhalb der Zeit, sie ist überzeitlich, zeitlos. Sie verändert sich nicht.

Sie spiegelt sich zweitens auch nicht in den Zahlgesetzen wider. Nehmen wir den einfachsten Fall, der vielleicht im Augenblick Schwierigkeiten machen könnte: die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. Das ist keine *zeitliche* Folge. Sie sieht nur so aus wie eine solche, weil wir sie nacheinander durchlaufen müssen, weil unser Denken sie niemals mit einem Male ganz umfassen kann. Sie ist auch keine rein *logische* Folge. Denn rein logisch ist es nicht einzusehen, warum es z. B. nur eine einzige ganze Zahl geben soll, die kleiner als 2 ist. Es ist eine *mathematische* Folge, d. h. eine solche, die durch ein mathematisches Prinzip, das Reihenprinzip — wir sprechen davon später (26) noch —, gebildet ist. Ein Beweis dafür liegt darin, daß wir die Glieder dieser Folge in beliebiger Reihenfolge bilden können, daß wir Glieder finden können, bis wohin noch niemals ein Mensch gezählt hat, noch zählen kann. Diese Folge ist also in Wirklichkeit ein *Beisammen* der Glieder, dessen gesetzmäßiger Bestand durch das Reihenprinzip gegeben ist. Als zweites Beispiel nehmen wir die Funktion $y = f(x)$, die am ersten zur Annahme zeitlicher Beziehungen in den mathematischen Gesetzmäßigkeiten zu führen geeignet ist. Wenn x sich verändert, so ändert sich y. Deutlicher, so scheint es, kann wohl kaum ein zeitlicher Zusammenhang ausgedrückt sein. Und doch wäre diese Annahme ein Irrtum. Nur durch unser Denken in der Zeit kommt es, daß wir die Variabeln *nacheinander* Werte *durchlaufen* lassen müssen. Es ist uns unmöglich, simultan eine Funktion ganz zu erfassen. In Wahrheit

ist aber die Funktion ein Gebilde, dessen Werte nicht *nacheinander entstehen*, sondern *zusammen bestehen*. Man darf sich durch die unserem beschränkten Denken angepaßte Ausdrucksweise des Mathematikers nicht irreführen lassen. Abgesehen davon, daß nur diese Auffassung zum Charakter des mathematischen Gegenstandes paßt, kann man zum Beweise auch, ähnlich wie vorhin, anführen, daß die Funktion reversibel ist, daß man sie beliebig oft durchlaufen kann, daß durch ein n-maliges Durchlaufen die Funktion nicht n-mal, sondern nur einmal existiert. Das alles wäre unmöglich, wenn die Funktion eine zeitliche Beziehung mit umfaßte.

Das Durchlaufenlassen der Werte ist eine Projektion auf die Zeit. Weil diese Projektion auf die Zeit möglich ist — sie ist durch den zeitlichen Ablauf der psychischen Vorgänge in uns gegeben —, vermag die Funktion zeitliche Beziehungen nichtmathematischer Gegenstände auszudrücken, wie es z. B. die physikalischen Kausalgesetze tun.

Da die Zahlenfolge und die Funktion die einzigen Fälle in der Algebra sind, bei denen zeitliche Beziehungen vermutet werden könnten, haben wir den Beweis für unsere Ablehnung der Gründung der Algebra auf die Zeit erbracht. Übrigens liegt bei dieser irrtümlichen Auffassung im Grunde wieder eine Verwechselung des logischen und des psychologischen Problems vor. Zeitliche Beziehungen spielen ohne Zweifel bei der Bildung der Zahlbegriffe und Zahlgesetze eine Rolle; aber in dem Gegenstand der Mathematik ist nichts mehr von ihnen vorhanden.

16. Die mathematischen Gesetze als Bestandsgesetze. Wenn wir einen Gedanken Mills[1]) erweitern, so läßt sich der Charakter der Zahlgesetze und überhaupt der mathematischen Gesetze kurz formulieren. Nehmen wir das Verhältnis zur Zeit als leitenden Gesichtspunkt, so können wir in den Gesetzeswissenschaften zwei Typen von Gesetzen unterscheiden: Die *Folgegesetze*, die eine in der Zeit stehende Verknüpfung aussagen, und die *Bestandsgesetze*,

---

[1]) Mill, System der deduktiven und induktiven Logik. Deutsch von Schiel[4]. 1877, II. Bd., S. 123. Die Tendenz dieser Erweiterung hat Stumpf auch, wenn er (Zur Einteilung der Wissenschaften, S. 61) Kausalgesetze und Strukturgesetze unterscheidet. Aber die Benennung erscheint mir nicht gut; denn es gehört doch auch zur Struktur der Natur, daß sich b ändert, weil sich a ändert.

die ein von der Zeit ganz unabhängiges bloßes Bestehen erfassen. Unsere Unterscheidungen lassen sich so in der Formel darstellen: Kausale Folgegesetze — weil a sich ändert, ändert sich b; Bestandsgesetze — wenn a ist, ist b. In den Naturwissenschaften gibt es viele Beispiele für Bestandsgesetze, z. B. manche chemische Gesetze, wie das Gesetz der multiplen Verbindungsverhältnisse, ferner die Beziehungen zwischen den Schwingungszahlen der Töne, die Beziehungen zwischen Lichtstärken- und Helligkeitsunterschieden; vor allem sind die beschreibenden Naturwissenschaften reich an solchen Gesetzen. Die Beziehungen zwischen den einzelnen Arten der Gesetze wollen wir nicht weiter untersuchen. Wir können jetzt kurz formulieren: *Die mathematischen Gesetze sind ausschließlich Bestandsgesetze*; ihre Formel ist $a \bigcirc b$, wenn mit $\bigcirc$ eine beliebige nichtzeitliche Verknüpfung bezeichnet wird. Man muß beachten, daß es sich hier um *Gesetze*, nicht einfach um *Sätze* handelt. Jedes Gesetz sagt eine *Beziehung* zwischen Fundamenten aus, die den Charakter der *Notwendigkeit* trägt. Der Satz beschreibt einfach einen Sachverhalt, der keine notwendige Beziehung ist. Das Urteil „Es gibt unendlich viele Primzahlen" ist ein Satz, der einen solchen Sachverhalt beschreibt; er ist logisch identisch beispielsweise mit dem Satze der Chemie „Es gibt n Elemente". Dagegen ist der pythagoreische Lehrsatz ein Gesetz; denn er sagt eine notwendige Beziehung zwischen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks und dem Gleichsein der betreffenden Quadrate aus. Selbstverständlich drücken die Sätze auch ein Bestehen aus; es ist auch möglich, daß sich Sätze nachträglich als Gesetze erweisen.

IV. Was die Zahl ist

17. Die Zahl nicht Gegenstand der Logik. Wir wollen im vorliegenden Kapitel zu Anfang die Auffassungen der Zahl besprechen, die sie in eine enge Beziehung zur Logik setzen. Wir werden dadurch von selbst zur Beantwortung der Frage geführt, was die Zahl denn eigentlich sei.

Immer und immer wieder hört man von Philosophen, besonders aber von Mathematikern, die Behauptung, die Zahl s ein *rein logisches Gebilde*, woraus man dann zu schließen pfleg daß Logik und Mathematik wesensverwandt seien.

Was heißt das: rein logisches Gebilde?

Es kann nur das eine bedeuten, daß die Zahl *irgendwie* zum Gegenstande der Logik gehört. Verstände man das nicht so, dann hätte man kein Recht, sie ein logisches Gebilde zu nennen.

Daß die Zahl zunächst nicht selbst Gegenstand der Logik ist, haben wir in (8) schon festgestellt, wollen es aber jetzt noch einmal nachdrücklich betonen. Gegenstand der Logik ist der Urteilssinn. Natürlich ist es nicht der spezifische Inhalt eines Urteilssinnes, der die Logik interessiert. Daß beispielsweise dieses Schreibpapier weiß ist, ist etwas, was etwa den Physiker angeht, der das Reflexionsvermögen des Papieres untersucht. Der Logiker schaut nur auf die allgemeinen Eigenschaften jedes Urteilssinnes, auf seine Elemente, seine Typen, seinen Bau, kurz, auf die Struktur *des* Urteilssinnes. Sein Gegenstand ist ein geltender Gegenstand, ein Sinngegenstand. Die Zahl ist aber, wie wir wissen, ein seiender Gegenstand. Sie ist also sicherlich nicht unmittelbar Gegenstand der Logik.

18. Die Zahl nicht durch ihre Form ein logisches Gebilde. Man könnte diesem Ergebnis zustimmen, aber sagen, die Zahl sei zwar nicht unmittelbar, wohl aber mittelbar ein logisches Gebilde, indem sie mit den Elementen des Urteilssinnes gegeben sei. Wir sind darum genötigt, ein wenig in die Struktur des Urteilssinnes einzudringen.

Welches ist der allgemeine Charakter des Urteilssinnes? Wenn ich das Urteil fälle: „Dieses Papier ist weiß“, so ist der Sinn des Urteils: „Von diesem Papiere gilt das Weißsein“. Das *Weißsein* ist nicht das *Weiße*. Das Weiße ist eine Eigenschaft des Papiers, die raumzeitlich an ihm existiert. Das Weißsein aber ist nicht etwas an dem Papier, es *ist* überhaupt nicht, sondern es stellt einen *Bedeutungsgehalt* oder, wie wir kürzer sagen wollen, eine *Form* dar, die von dem Gegenstand „dieses Papier“ *gilt*. Form ist also das, was das Urteil als von einem Gegenstand geltend anerkennt. Da wir früher (5) alles, was gilt, Wert genannt haben, gehört die Form in die Klasse der Werte. Allgemein gesprochen ist nun der Sinn eines Urteils das Gelten einer Form von einem Gegenstand. Dem Gegenstand wird durch die Form eine Bestimmung oder Bestimmtheit gegeben. Urteilen — oder, was für uns dasselbe ist, Denken oder Erkennen — ist Gegenstandsbestimmung.

Jeder Gegenstand ist bestimmt, sonst könnte er nicht Gegenstand, d. h. Subjekt eines Urteils sein. Wir können auch so sagen: jeder Gegenstand steht in geltender Form. Wir kennen schon eine Reihe solcher Formen von früher. Alle Kategorien gehören nämlich hierher: das Sein, das Gelten, die Idealität, die Realität usw. Dann auch, wie wir vorhin sahen, speziellere Formen wie das Weißsein, das Rotsein, das Menschsein usw.

Auch die Zahl steht, wie jeder Gegenstand, in geltenden Formen. Man darf aber daraus nicht schließen, daß die Zahl, weil die Form ja ein Element jedes Urteilssinnes ist, ein logisches Gebilde sei. Sonst wäre *jeder* Gegenstand irgend einer Wissenschaft ein logisches Gebilde; jeder steht ja in geltender Form. Als Erkennen ist die Mathematik selbstverständlich wie jede Wissenschaft von der logischen Form abhängig. Aber der Gegenstand der Mathematik ist der von der Form geformte *Inhalt*, und dieser Inhalt — die Zahlen und die geometrischen Gegenstände — ist eben etwas *Seiendes* und nicht etwas Geltendes. Nicht durch die Logik, sondern durch die logische Form wird die Mathematik erst möglich. Der logische Charakter der Zahl ist also nicht darauf zu gründen, daß sie gleich jedem anderen Gegenstand durch geltende Formen bestimmt ist.

Um indes alle falschen Auffassungen zurückweisen zu können, müssen wir noch tiefer in die Struktur des Urteilssinnes eindringen.

19. Das spezifisch Logische. Die Formen der Gegenstände sind vom Inhalte her spezifisch verschieden. Das Sein ist etwas ganz anderes als das Gelten, beides wieder etwas ganz anderes als die Realität usw. Ist es nicht möglich, diese spezifischen Verschiedenheiten abzustreifen und die natürlich aufs höchste abgeblaßte logische Form übrig zu behalten, die jedem Gegenstande *lediglich als Gegenstand* zukommt, die gleichsam das Gemeinsame aller Formen ausdrückt, das, was da sein *muß*, damit überhaupt gedacht werden kann? Diese Form wäre dann schlechthin die Form *des* Gegenstandes, die *Gegenständlichkeit*, und der Gegenstand, der diese Form hat, wäre das rein Logische, das spezifisch Logische.

Versuchen wir, es zu finden. Wenn wir denken, so denken wir stets einen Gegenstand, und zwar *einen* Gegenstand, d. h. einen *bestimmten* Gegenstand, *denselben* Gegenstand, den, der mit sich

selbst identisch ist. Das Wörtchen „ein" soll also die *Identität* hervorheben. Diese Forderung der Identität ist nötig, damit dasselbe Urteil wiederholt und damit der Gegenstand auch in verschiedenen Urteilen wiedererkannt werden kann. Wir können das jetzt so ausdrücken, daß wir sagen: der Gegenstand muß die Form *Identität* oder die Form des *Einen* haben.

Damit haben wir aber schon etwas Weiteres ausgesprochen. Dadurch, daß wir den Gegenstand als den *einen* denken, unterscheiden wir ihn von dem *anderen*. Das Eine und das Andere fordern sich gegenseitig, sie sind Korrelativbegriffe. Es gibt das Eine nur, wenn es das Andere gibt, und das Andere nur, wenn es das Eine gibt. Beides gehört zusammen, ist voneinander unzertrennlich. Denke ich das Eine, so denke ich auch stets das Andere. Die Form des Einen und des Anderen ist nun die gesuchte, von aller spezifischen Inhaltsbestimmtheit befreite allgemeinste Form, ist die Form, die allen Gegenständen gemeinsam ist, ist die Gegenständlichkeit. Daß zu dieser allgemeinsten Form auch natürlich ein allgemeinster Inhalt „Inhalt überhaupt" (das Inhaltsminimum) hinzukommen muß, damit der Gegenstand „Das Eine und das Andere" da sei, ist wohl klar. Das *Eine und das Andere* ist also der allgemeinste Gegenstand, der notwendig gedacht werden muß, wenn ich überhaupt denke, ist das spezifisch Logische.

Wir holen schließlich noch eine letzte Charakteristik daraus hervor. Das Eine und das Andere ist zweifellos eine *Mehrheit*, eine *Mannigfaltigkeit*. Aber dadurch, daß das Eine und das Andere notwendig zusammengehören, ist diese Mannigfaltigkeit zu einer *Einheit* zusammengefaßt. Jetzt ist die Charakteristik des spezifisch Logischen, des „logischen Urphänomens", vollendet.

Liegt nun aber nicht in diesem Logischen schon der Begriff der Zahl beschlossen? Ist nicht das *Eine* die *Eins*? Ist nicht das „und" das „plus"? Ist nicht die Einheit der Mannigfaltigkeit die Mehrzahl? Es scheint wirklich nichts näher zu liegen als das. Und doch ist es falsch.

20. Das Eine nicht die Eins. Die Zahl Eins muß notwendig einer anderen Zahl Eins *gleich* sein. Gleichheit im Sinne von absoluter Gleichheit zweier Gegenstände liegt dann vor, wenn alles, was von dem einen gilt, auch von dem anderen gilt,

mit Ausnahme des Umstandes, daß der eine neben dem anderen wirklich ist. Daß es diese Gleichheit in der Algebra gibt, ist eine grundlegende Wahrheit, die, wenn sie auch nicht ausdrücklich ausgesprochen zu werden pflegt, dennoch erst die arithmetischen Operationen ermöglicht; denn wenn nicht $1 = 1$ ist, dann ist alles Rechnen Unsinn. Hat diese Beziehung aber in der eben gezeichneten rein logischen Sphäre einen Platz? Kann ich sagen, das Eine sei gleich dem Anderen, weil man beide vertauschen könne? Offenbar nicht. Denn die *einzige* Beziehung zwischen dem Einen und dem Anderen ist die *Verschiedenheit.* Darauf läßt sich keine *Gleichheit* gründen. Das Eine steht wie das Andere nur in der Form Identität mit sich selbst, nicht in der Form Gleichheit. Identisch kann immer nur etwas mit sich selbst sein, nie mit einem anderen; gleich aber kann etwas immer nur mit einem anderen sein, nie mit sich selbst. Es sind also zwei verschiedene *Sphären* oder *Medien*, in denen die logischen Formen Identität und Gleichheit herrschen. In dem rein logischen Medium herrscht nur die Identität, die damit die Verschiedenheit (Andersheit) setzt; hier gibt es nur Identität oder Verschiedenheit. In dem Medium der Mathematik sind aber z. B. zwei Zahlen niemals miteinander identisch, sondern immer nur gleich. Identisch kann nur *ein* Gegenstand sein; zwei Zahlen sind aber zwei Gegenstände. Die Gleichheit setzt nun aber eine Art von Identität des Verschiedenen voraus. Zwei gleich gesetzte Gegenstände müssen wenigstens teilweise übereinstimmen. Bei vollkommen gleichen Gegenständen, wie sie z. B. die Gleichung $1 = 1$ zeigt, liegt eine eigenartige Identität des Verschiedenen vor. Man sieht nun leicht, daß das alles nur in einer *nicht* logischen Sphäre möglich ist. In der rein logischen Sphäre sind die Gegenstände nur mit sich selbst identisch oder nur verschieden. Einen weiteren Inhalt hat das rein Logische nicht. Führt man also den Begriff der Gleichheit ein, so hat man ein *alogisches* Moment hinzugenommen.

21. Das „und“ nicht das „plus“. In ähnlicher Weise läßt sich auch zeigen, daß das „und“ in „das Eine und das Andere“ nicht das „plus“ ist. Das „plus“ sagt nämlich etwas aus, was in dem rein logischen „und“ nicht enthalten ist. Das „und“ besagt nach unseren früheren Überlegungen (19) eine Einheit des Mannig-

faltigen, eine Trennung und gleichzeitig eine Verbindung. Weder die Trennung noch die Verbindung wird auf Kosten der anderen betont; es ist keine Verbindung, wo eine Verschmelzung zu einem Gegenstande stattfindet, und keine Trennung, wo die Einheit zerrissen wird. Trennung und Verbindung werden durch das „und" im logischen Gleichgewicht gehalten. Aus diesem Grunde kann man das „und" auch zwischen alle möglichen Gegenstände setzen. Ich kann nicht nur von der Kuh und dem Schwanze, sondern auch von der Tugend und dem Maikäfer, von Wahrheit und Falschheit, von Gott und der Welt Sinnvolles aussagen. Das „plus" bedeutet aber etwas ganz anderes. Vorbemerkt sei, daß es sich hier natürlich nicht um das „plus" als das die positive von der negativen Zahl unterscheidende Zeichen, sondern um das Additionszeichen handelt. Dieses „plus" besagt nun durchaus kein Gleichgewicht. $2 + 3 = 5$ bedeutet vielmehr, daß die 2 mit der 3 zu etwas Drittem verschmolzen wird. Die Verbindung überwiegt also hier die Trennung. Vielleicht kann ein Vergleich den Unterschied deutlich machen: Das logische „und" gleicht der chemischen Mischung, das mathematische „plus" der chemischen Verbindung. Natürlich hinkt der Vergleich wie alle Vergleiche. Aus dem aufgewiesenen Charakter des „plus" folgt nun auch, daß es sich durchaus nicht zwischen alle Gegenstände setzen läßt. Wahrheit plus Falschheit, das Eine plus das Andere — das geht nicht. Es muß den Gegenständen schon ein besonderer Charakter zukommen, damit sie die Verbindung mit „plus" gestatten: die Gegenstände dürfen nicht *nur* verschieden, sondern müssen zugleich auch noch etwas anderes sein. Und das greift offenbar über die logische Sphäre hinaus.

22. Die Einheit des Mannigfaltigen nicht die Mehrzahl. Damit ist nun zugleich die Antwort auf unsere dritte Frage gegeben. Ist das „und" nicht das „plus", dann ist auch die Einheit des Mannigfaltigen nicht die Mehrzahl. Diese logische Mannigfaltigkeit bedeutet bloß eine „Mehrerleiheit", d. h. sie bezeichnet nur überhaupt unterschiedene Gegenstände, Gegenstände, von denen nur die Verschiedenheit ausgesagt wird und nichts Sonstiges. Sie bezeichnet eine Häufung, eine Menge verschiedener Gegenstände, die in allerlei Hinsicht verschieden sind, deren Verschiedenheit noch keine Bestimmtheit hat. Vor allem bedeutet das Eine und das Andere keine *Reihe*. Man braucht sich nur den Sinn der Worte

„das Eine“, „das Andere“ zu überlegen, um einzusehen, daß damit alles genannt ist. Es gibt außer dem Einen und dem Anderen nichts anderes mehr. Auch hat das Eine vor dem Anderen keine logische Priorität. Beide sind gleich ursprünglich; das Eine ist mit dem Anderen notwendig mitgegeben. *Es gibt also keine Reihe in der rein logischen Sphäre.*

23. Die Zahl nicht durch Setzung entstanden. Man kann noch auf eine letzte Weise versuchen, die Zahl aus dem logischen Urphänomen abzuleiten, indem man nun nicht auf die Einheit des Einen und des Anderen reflektiert, sondern, weil es bei den Zahlen vollkommene Gleichheit gibt, auf die wiederholte Setzung desselben Gegenstandes beim Denken. Ich setze ein Etwas als Eins, dann noch ein Etwas als Eins usw; durch Synthese fasse ich die Eins zu Zwei, Drei usw zusammen. Nichts erscheint einleuchtender als das; also ist die Zahl doch ein rein logisches Gebilde, das wir nur nicht, wie in den vorigen Nummern, von der Statik des Logischen her, sondern von seiner Dynamik aus verstehen müssen.

Aber leider ist diese hübsche Ableitung der Zahl noch falscher als die vorhin besprochene. Wenn wir uns der Überlegungen über die Gebiete des Logischen und Psychischen (11) erinnern, dann bemerken wir sogleich, daß diese Ableitung etwas in das logische Gebiet versetzt, was es darin nicht gibt, nämlich die Zeit; denn eine Wiederholung gibt es nur in der Zeit. Etwas Dynamisches in dem Sinne, daß damit zeitliches Tun, Bewegung verknüpft ist, existiert im Logischen nicht. Wohl im Psychischen. *Jenes wiederholte Setzen ist ein Wiederholen psychischer Vorgänge, aber nicht ein Wiederholen des gesetzten Gegenstandes.* Ich kann einen Gegenstand wiederholt, z. B. zweimal, setzen. Aber damit habe ich noch nicht den Gegenstand zweimal, habe ich nicht zwei Gegenstände. Sondern ich habe denselben Gegenstand *zweimal gesetzt*; das zweimal bezieht sich lediglich auf das Setzen. Die Frage ist schon sinnlos: wievielmal gibt es den rein logischen Gegenstand? Es gibt ihn nicht vielmal und nicht einmal; denn er ist weder im Raume noch in der Zeit, sondern in der raum- und zeitlosen logischen Sphäre.

Es ist gut, sich diese Verhältnisse recht klar zu machen; denn die Setzung als Ursprung der Zahl spukt in allerlei Form in der Philosophie.

24. Die Homogeneität als Kategorie der Zahl. Die Nachprüfung der Behauptung, die Zahl sei ein rein logisches Gebilde, hat uns belehrt, daß in der Zahl Elemente stecken, die es im rein logischen Medium nicht gibt. Die Zahl kann im rein logischen Medium nicht bestehen. In welchem Medium sollen wir sie nun suchen?

Um die Frage zu beantworten, gehen wir von der uns schon bekannten grundwesentlichen Tatsache aus, daß es im Medium der Zahl, wie die Gleichung $1 = 1$ beweist, bei aller Verschiedenheit doch vollkommene Gleichheit gibt. Wie muß das Medium beschaffen sein, das eine solche Gleichheit erlaubt? Es muß zunächst einmal beliebig viele *Stellen* haben. Dadurch ist die Verschiedenheit der Gegenstände ermöglicht, so daß wir von *noch* einem Gegenstand und *noch* einem Gegenstand usw sprechen können, die diese Stellen einnehmen. Im logischen Medium war das anders. Das Eine und das Andere sind hier die einzigen Stellen; das logische Medium ist ja auch weiter nichts als die Relation „das Eine und das Andere". Das Medium, in dem absolute Gleichheit möglich ist, muß nun weiterhin so beschaffen sein, daß alle seine Gegenstände untereinander vollkommen vertauschbar sind, und daß derselbe Gegenstand, an verschiedene Stellen gebracht, sich nicht im geringsten ändert, sondern stets absolut mit sich *identisch* bleibt. Wir nennen ein derartiges Medium *homogen* und haben damit das erste alogische Moment der Zahl gefunden: *Die Homogeneität.* Sie bedeutet also für den Gegenstand *den Ausschluß jeder Individualität.* Auch darin ist ein wesentlicher Unterschied vom logischen Medium vorhanden. Das logische Medium kennt die Homogeneität nicht, es kennt nur den Unterschied des Einen vom Anderen. Durch die Homogeneität des Zahlenmediums ist die absolute Gleichheit trotz aller Verschiedenheit verbürgt: Die 1 unterscheiden sich im homogenen Medium nur durch ihre Stellen, durch sonst nichts.

Was haben wir bis jetzt gewonnen? Haben wir vielleicht schon die Zahl? Sicherlich nicht. Denn unserem Medium fehlt noch etwas. Das *nur* homogene Medium ist eine wahllos, ordnungslos zusammengewürfelte Menge von verschiedenen, absolut gleichen Gegenständen — weiter nichts. Das Plus haben wir noch nicht, die Verschmelzung mehrerer Gegenstände zu einem neuen noch ht — also haben wir auch die Zahl noch nicht. Unserem um fehlt die Ordnung.

25. Die Quantität als Kategorie der Zahl. Um ein weiteres konstituierendes, alogisches Merkmal der Zahl zu finden, überlegen wir uns, daß in der Zahl ein *Soviel* liegt, daß sie Antwort auf die Frage nach dem Wieviel gibt. Damit also das *Eine* zur *Zahl* wird, muß der Begriff des Maßes, das Soviel hinzukommen. Ein Messen ist aber nur möglich bei der *Quantität*. Also ist die Quantität dasjenige, was die Existenz der Zahl ermöglicht. *Die Quantität ist nicht Gegenstand der Mathematik.* Aber nur in ihr und durch sie haben die Zahlen Bestand. Besinnen wir uns, was die Gleichung $1 + 1 = 2$ bedeutet. Hier werden zwei verschiedene Gegenstände zu einer neuen Einheit verschmolzen. Das war in den beiden Medien, die wir bisher kennen lernten, dem logischen und dem homogenen, nicht möglich. Wohl aber ist es möglich im Medium der homogenen *Quantität*. Denn erstens verstehen wir jetzt, inwiefern aus zwei Zahlen eine neue Zahl entstehen kann, wir verstehen das „Plus", die Addition. Zweitens verstehen wir das Gleichheitszeichen; beide Seiten bedeuten jetzt dasselbe Quantum.

Nun haben wir den spezifischen Inhalt der Zahl gefunden. Das homogene Medium gab uns nur die Gegenstände überhaupt an verschiedenen Stellen. In ihm besaßen die Gegenstände noch weiter nichts als Form und Inhalt überhaupt. Jetzt ist erst in diese „leere" Form der spezifische Gehalt gegossen, jetzt ist die Form „gefüllt", und dieser Gehalt, dieser spezifische Inhalt ist das Quantum.

Man achte zunächst auf den Unterschied des *nur* homogenen Mediums vom homogen-quantitativen Medium. In jenem sind alle Gegenstände homogen, in diesem gibt es homogene Gegenstände.

Natürlich ist die Quantität (ebenso wie die Gleichheit und Ungleichheit) eine logische Form. Das macht aber die Zahl zu keinem logischen Gebilde. Die Zahl ist ein quantitativ bestimmter Gegenstand, die Form Quantität aber nicht; ebensowenig wie z. B. die Form Wirklichkeit ein wirklicher, die Form Realität ein realer Gegenstand ist. Zahlen sind nicht nur Gegenstände überhaupt, die Form überhaupt und Inhalt überhaupt haben, sondern ihr Inhalt ist mehr als Inhalt überhaupt, er ist quantitativ.

Die Quantität ist kein Gegensatz, kein Korrelativglied zur Qualität. Sie ist selbst eine Qualität, eine spezifische Art der Qualität.

Hier erhält nun auch der Begriff der *Ungleichheit*, der ebenso wichtig wie der bisher allein betrachtete der Gleichheit ist, seine Klarheit. Wenn zwei Zahlen ungleich sind, so bedeutet das, daß die eine *mehr* quantitative Einheiten oder Quanten oder Einzahlen enthält als die andere. Im rein logischen Medium war derartiges undenkbar. Dort gibt es *nur* Verschiedenheit, keine bestimmte Verschiedenheit. Wenn ich weiß, daß 1 und 2 *nur* verschieden sind, dann sind sie für mich keine Zahlen; denn ich kann sie nicht auf ihre Gleichheit oder Ungleichheit vergleichen.

26. Die spezifische Art der Quantität des Zahlenmediums. Diese Art bedarf noch einer genaueren Charakterisierung.

Erstens ist das Zahlenquantum das *allgemeinste Quantum*, das wir kennen. Die Begriffe Quantität, Quantum sind letzte, undefinierbare Begriffe, die man höchstens mehr oder weniger zutreffend umschreiben kann. Man könnte Quantität allem beilegen, das in unmittelbarem (nicht übertragenem) Sinne der Abstufung oder des Grade-Habens fähig ist. Überblickt man nun alles das, was in diesem Sinne quantitativ ist, das räumliche Quantum, das zeitliche Quantum, die verschiedenen Arten von psychischen Quanten u. a., so sieht man, daß das Quantenhafte an all diesen Gegenständen durch Zahlen darstellbar ist, nicht immer durch Kardinalzahlen, manchmal auch, wie bei vielem Psychischen, nur durch Ordnungszahlen, aber jedenfalls stets durch Zahlen. Daraus ergibt sich, daß die Zahl das allgemeinste Quantum ist. Sie erfaßt das und nur das, was allen den genannten Quanten gemeinsam ist; sie sind alle gegenüber dem Zahlenquantum durch typische Besonderheiten ausgezeichnet.

Man könnte statt Quantum auch Größe sagen. Aber weil die Mathematik keinen Anlaß hat, den Größenbegriff in der oben umschriebenen allgemeinen Form zu verwenden, ziehe ich den ersteren Begriff vorläufig vor.

Zweitens ist das Zahlenmedium ein *unstetiges Quantum*. Stetigkeit ist gleichfalls ein letzter Begriff, der sich nicht definieren läßt. Aber er ist ein durchaus klarer und verständlicher Begriff, wenn man nur darauf achtet, daß er mit der sinnlichen Anschauung nicht das geringste zu tun hat. Stetigkeit bedeutet Lückenlosigkeit und Unzusammengesetztheit (das stetige Quantum ist also nicht das mathematische Kontinuum). Daß das Zahlen-

medium nun nicht stetig, sondern diskret ist, erhellt einmal aus der bloßen Phänomenologie des Zahlbereiches. Im Zahlbereich gibt es die Eins als Einheit. Sie ist selbst noch teilbar, also quantitativ. Aber sie ist eine *natürliche* Einheit, die alle Menschen nicht nur annehmen, sondern annehmen *müssen*; es gibt hier keine andere Einheit, sie ist *die* Einheit, die wir nicht willkürlich ändern können, von deren Änderung zu sprechen überhaupt keinen Sinn hat. Etwas Derartiges gibt es im stetigen Quantum nicht. Dort sind wohl auch Einheiten möglich, aber nur *künstliche* Einheiten, die auf Übereinkommen beruhen und die wir deshalb willkürlich ändern können. Eine natürliche Einheit ist nur denkbar in einem unstetigen Bereiche. Ebenso deutlich ergibt sich die Unstetigkeit des Zahlenmediums aus dem Folgenden.

Drittens nämlich ermöglicht das Zahlenmedium eine bestimmte Ordnung, die *Reihenordnung.* Es gibt unendlich viele Zahlen. Jede von ihnen ist bestimmt und unterscheidet sich von allen anderen in bestimmter Weise. Was gibt jeder Zahl diese Bestimmtheit? Was macht die 5 zur 5, die sich z. B. von der 6 dadurch unterscheidet, daß $6 - 1 = 5$ ist? Es ist *die* Ordnung der Zahlen, die darin besteht, daß sie eine Reihe bilden, die einem Bildungsgesetz untersteht. Unter dem Bildungsgesetz (oder Reihenprinzip) verstehen wir die für die ganze Reihe gleichbleibende Regel, wonach sich zu jedem Gliede ein anderes durch seine Beziehung zu ihm bestimmen läßt. Von zwei Gliedern, die auf Grund des Bildungsgesetzes auseinander erhalten sind, ist das eine, etwa das, aus dem das andere bestimmt worden ist, das vorangehende, das andere das folgende Glied. Man sieht, daß die Folge der Reihe keine zeitliche Folge ist, auch keine rein logische. Die Zahlreihe beginnt mit der Eins. Ihr Bildungsgesetz lautet, daß zwei aufeinanderfolgende Zahlen dadurch bestimmt sind, daß die eine um die Einheit größer als die andere ist. Die der 1 folgende Reihenzahl ist also die 2, die durch Verschmelzung aus dem Gegenstand $1 + 1$ geworden ist usw. In dieser Reihe nimmt jede Zahl ihre bestimmte Stelle ein, d. h. sie bildet ihr eigenes Maß. In den Zahlen selbst liegt die Bestimmtheit, indem sie in sich selbst das Gesetz der Bildung tragen. *Die Zahlen zählen sich also selbst*, sie sind für sich bestehende Gegenstände. Man sieht nun ohne weiteres, daß diese Reihenfolge nur in einem unstetigen Quant möglich ist. Denn jeder Versuch der Herstellung einer solcl

Ordnung in einem stetigen Quantum hat die Zahl notwendig zur Voraussetzung; bei jeder Reihe, auch der scheinbar primitivsten, wird, weil sie als Reihe, von einem beliebigen Anfang an gerechnet, ein erstes, zweites, drittes usw Glied enthalten muß, gezählt. Die Zahlreihe ist die ursprünglichste, die in Wahrheit primitivste Reihe. Sie kann deshalb in einem stetigen Quantum nicht erst hergestellt werden, sondern muß in der Struktur des Quantums mitgegeben sein.

Die typischen Kategorien des Zahlbereiches sind also: ideales Sein, Zeitlosigkeit, Homogeneität, Quantität.

27. Die Zahl kein bloßes Stellenzeichen. Von hier aus ergibt sich auch leicht die Falschheit der Auffassung, wonach die Zahl ein bloßes Stellenzeichen sei. Darin liegt der Gedanke beschlossen, die Zahl erhalte von der Stelle her ihre Bestimmtheit. Wir sahen, daß das gerade Gegenteil der Fall ist. Im nur homogenen Medium besaßen die Stellen noch keine Ordnung. Hat man aber mit Hilfe der Quantität die Zahlreihe, so kann man die Stelle, an der die 1 steht, *danach* als erste Stelle bezeichnen usw. Mit diesen Stellen kann man nicht rechnen. Die erste und die zweite Stelle sind nicht zusammen soviel wie eine dritte Stelle, sondern sie geben zusammen eben zwei Stellen. Die Ordnung kommt also in das homogene Medium erst durch die Zahl. Daraus folgt, daß die Reihenbildung, aus der viele Logiker die Zahl ableiten wollen, die Zahl schon voraussetzt.

28. Zahl und Zahlbegriff. In der Reihe kommt jede Zahl nur einmal vor. Aber es gibt nicht nur *eine* 1, *eine* 2 usw, sondern beliebig viele 1, 2 usw. Es gibt nur *einen* Begriff der 1, unter den alle Gegenstände 1 fallen. Strenggenommen — wir hörten früher (23) schon Entsprechendes — läßt sich nicht einmal das vom Begriff einer Zahl sagen; er ist weder einmal noch mehrmals da, sondern ist nur mit sich selbst identisch. Wenn es aber nur *eine* 1 gäbe, dann wäre z. B. die Gleichung $1 = 1$ ohne Sinn, dann wäre $1 + 1$ unmöglich usw. Der Begriff der Zahl ist also etwas anderes als die Zahl. Der Begriff der Zahl ist ein geltender Gegenstand, die Zahl ein Seinsgegenstand. Sie liegen auf völlig verschiedenen Wirklichkeitsgebieten. Es ist alb auch durchaus falsch, die Zahl als einen Begriff zu be-
[illegible]en.

29. Zahl und sinnliche Wirklichkeit. Da die Zahlen sich selbst zählen (26), wie ist es da möglich, daß sie auch sinnliche Gegenstände zählen können, die einem ganz anderen Wirklichkeitsbereich angehören?

Man erledigt diese Frage nicht mit der Feststellung, zählen heiße einfach, sinnliche Gegenstände der Zahlreihe zuordnen. Ich zähle fünf Bäume, bedeutet danach, ich ordne diese Bäume den fünf ersten Zahlen der Zahlreihe zu. Das genügt dem Mathematiker vollständig, aber nicht dem Logiker. Diese Zuordnung setzt doch voraus, daß *ein* und nur *ein* Baum jedesmal zugeordnet wird. Ich wende also dabei, wenn es auch nicht ausdrücklich erwähnt wird, tatsächlich auf jeden Baum die Zahl 1 an. Wie kann ich das, da doch die Bäume sich nicht absolut gleichen, sondern in tausendfacher Hinsicht verschieden sind? Das ist unser Problem.

Um es zu lösen, fragen wir uns, wie denn im Vergleich zu dem Zahlbereich die kategoriale Struktur der sinnlichen Wirklichkeit sei. Die Kategorie der Quantität macht keine Schwierigkeit, da die sinnliche Wirklichkeit ebenfalls quantitativ ist, wenn auch mit einem spezielleren Inhalt der Quantität. Es bleibt also nur zu untersuchen, was für eine Kategorie sie im Vergleich zur Homogeneität aufzuweisen hat.

Als Leibniz einmal am hannoverischen Hofe die alte stoische Lehre vertrat, unter den Dingen herrsche eine solche Mannigfaltigkeit, daß es nicht zwei gleiche gebe, wollten die Hofdamen, um ihn zu widerlegen, zwei gleiche Baumblätter suchen; sie fanden aber keine. Darin liegt ein Grundzug der sinnlichen Wirklichkeit ausgesprochen, die Individualität. Jedes Ding, überhaupt jeder sinnliche Gegenstand ist einzigartig. Diese individuelle Bestimmtheit der Gegenstände der sinnlichen Wirklichkeit ist der Grund oder, wenn man will, nur ein anderer Ausdruck für die Mannigfaltigkeit, die *Heterogeneität* dieser Wirklichkeit.

Aber diese Mannigfaltigkeit ist durchbrochen. In einer *nur* heterogenen Welt könnten wir uns nicht zurecht finden, sie wäre für uns ein Tohuwabohu. Die Welt ist uns vielmehr gegeben in einer bestimmten kategorialen Struktur, d. h. sie ist für uns nicht mehr ungeformt, sondern geordnet. Es muß bei aller Verschiedenheit auch eine Gleichheit, bei aller Mannigfaltigkeit auch eine Identität geben. Heterogeneität und Homogeneität sind in der sinnlichen Wirklichkeit in einzigartiger Weise so mit-

einander verbunden, daß die sinnlichen Gegenstände in einer gewissen Hinsicht als gleich betrachtet werden können. So sind sie z. B. alle insofern gleich, als sie alle sinnlich-wirklich sind. Diese die Homogeneität betreffende Hinsicht kann aber natürlich auch kleine Bereiche umfassen. Alle Tiere sind z. B. in Hinsicht auf das Tier-Sein homogen. Man sieht, daß solche Hinsichten homogene Schichten aus der Wirklichkeit herausheben. Und hier ist der Punkt, wo die Zahl ansetzen kann. Soll die Zahl auf die sinnliche Wirklichkeit angewandt werden, so muß — es bleibt uns nichts anderes übrig, als in Bildern zu reden — die Heterogeneität derselben gleichsam vernichtet werden, so daß die Homogeneität allein übrig bleibt; oder die Wirklichkeit muß in ein homogenes Medium gleichsam eingetaucht, sie muß *homogeneisiert* werden. Wie von der Dreidimensionalität räumlicher Gebilde durch Projektion auf die Ebene gleichsam eine Dimension gestrichen, zerstört wird, so wird die heterogen-homogene Wirklichkeit ihre Heterogeneität durch Projektion auf ein homogenes Medium gleichsam verlieren und so die Anwendung der Zahl ermöglichen. Zwei Tiere, wenn es auch sogar zwei derselben Art, wie z. B. zwei Hauskatzen, wären, könnten nicht gezählt werden, wenn sie nicht in Hinsicht auf ihr Katzen-Sein allein, abzüglich aller individuellen Bestimmtheiten, betrachtet werden könnten.

Alles, was gezählt werden will, muß also in ein homogenes Medium erhoben werden, es muß eine *Stelle* in einem solchen Medium einnehmen. *Genau* so, wie nach der früheren Ausführung (27) die Zahlstellen im homogenen Medium mit Hilfe der Zahl gezählt werden, *genau* so werden dann auch die sinnlichen Gegenstände gezählt, wenn sie eine Stelle in einem homogenen Medium inne haben. Und genau so wenig, wie man mit den Zahlstellen rechnen kann, kann man es auch mit den homogeneisierten Gegenständen; eine Katze und noch eine Katze sind nicht zusammen gleich einer dritten Katze, sondern gleich zwei Katzen.

30. Homogeneität und Heterogeneität. Wir wollen uns indes mit dem Ergebnis dieser Nummer nicht begnügen, sondern jetzt, wo wir von den beiden Begriffen der Homogeneität und der Heterogeneität eine erste Kenntnis erlangt haben, versuchen, sie deutlicher zu fassen. Das ist für spätere Ausführungen notwendig, vermag aber auch jetzt Mißverständnisse zu zerstreuen

und den Unterschied der Zahlenwirklichkeit und der sinnlichen Wirklichkeit ganz klar zu machen.

Wir knüpfen zunächst an einige Begriffe der Logistik (9) an. Wir nennen *Inhalt* jede Satzfunktion. Die Menge der Werte, die die Funktion bestätigen, nennen wir den zu dem Inhalt gehörigen Umfang (Klasse). Da die Satzfunktion ein Urteil wird, wenn man für die Variable einen Wert einsetzt, so können wir auch allgemeiner sagen: Inhalt ist die Menge aller Prädikate, die von dem durch eine Satzfunktion bestimmten Umfang gelten; Umfang ist die Menge der Subjekte, die durch eine Satzfunktion bestimmt wird. Auch jeder *einzelne* Gegenstand, d. h. ein solcher, der nicht durch Klassenbildung entstanden ist, bildet einen Umfang, zu dem sein Inhalt gehört.

Wenden wir uns nun wieder der Betrachtung der sinnlichen Wirklichkeit zu, so haben wir vorhin als eines ihrer Merkmale herausgestellt, daß, wie wir nun sagen können, jeder ihrer Gegenstände ein Umfang ist, zu dem ein anderer Inhalt gehört. Das ist aber nicht das einzige Merkmal der Heterogeneität. Nehmen wir einen Gegenstand der sinnlichen Welt, z. B. einen Stein, so überzeugen wir uns leicht, daß es selbst dann unmöglich ist, diesen Gegenstand *vollständig* zu beschreiben, wenn wir von allen seinen Beziehungen absehen und ihn rein für sich betrachten. Man muß das „vollständig“ im Wortsinne nehmen und darf nicht an physikalische Vereinfachungen denken, wonach der Stein durch die Angabe seiner Zusammensetzung, vielleicht auch noch des Gewichtes und der Größe beschrieben wäre. Eine vollständige Beschreibung müßte uns alles über jeden noch so kleinen Teil sagen. Man braucht sich das bloß ein wenig auszumalen, um einzusehen, daß es eine solche Beschreibung nicht geben kann. Jeder Gegenstand der sinnlichen Wirklichkeit hat einen unübersehbaren Inhalt. Man bemerkt nun auch leicht, daß das erste Merkmal der sinnlichen Wirklichkeit auf dem zweiten beruht. Besäße nicht jeder Gegenstand einen unübersehbaren Inhalt, dann wäre die Wahrscheinlichkeit, daß es absolut gleiche Gegenstände in ihr gäbe, größer.

In der Wirklichkeit der Zahlen und überhaupt der mathematischen Gegenstände ist das anders. Wie wir vom Zahlbereich wissen und später vom geometrischen noch hören werden, gib in ihnen absolut gleiche Gegenstände, mit anderen Worten, ni

jeder ihrer Gegenstände ist ein Umfang, zu dem ein *anderer* Inhalt gehört. Es finden sich hier auch keine unübersehbaren Inhalte. Jeder Gegenstand kann *vollständig* beschrieben werden, d. h. diese Beschreibung ist notwendig und hinreichend, um einen Gegenstand als *diesen* Gegenstand zu bestimmen. So ist z. B. die Zahl 3 vollständig durch ihre Stelle in der Zahlreihe bestimmt, ebenso jeder Kreis vollständig durch eine seiner Formeln, etwa $x^2 + y^2 = r^2$.

Nach diesen Überlegungen werden nun die folgenden allgemeinen Definitionen verständlich sein.

Absolute Heterogeneität besitzt eine Wirklichkeit, wenn jeder ihrer Gegenstände ein Umfang ist, zu dem ein anderer und unübersehbarer Inhalt gehört. Wir nennen einen solchen Gegenstand ein *Individuum.* Die sinnliche Wirklichkeit besitzt eine solche Heterogeneität.

Absolute Homogeneität besitzt eine Wirklichkeit, wenn jeder ihrer Gegenstände ein Umfang ist, zu dem derselbe Inhalt gehört, und dieser Inhalt ein Minimum ist (17). Eine solche Homogeneität besitzt unser nur homogenes Medium (24); das Homogeneisieren in (29) bedeutet also auch Homogeneisieren im absoluten Sinne.

Relative Heterogeneität besitzt eine Wirklichkeit, wenn jeder ihrer Gegenstände ein Umfang ist, zu dem ein anderer, aber nicht unübersehbarer Inhalt gehört. Eine solche Heterogeneität besitzt das Gebiet der Werte (und das der Relationen?).

Relative Homogeneität besitzt eine Wirklichkeit, wenn jeder ihrer Gegenstände ein Umfang ist, zu dem nicht immer ein anderer und niemals ein unübersehbarer Inhalt gehört. Eine solche Homogeneität besitzt die Wirklichkeit der mathematischen Gegenstände.

Daß diese Begriffe für die Untersuchung der Methoden noch spezialisiert werden müssen, werden wir später (50, 56) andeuten.

31. Menge und Zahl. Unsere bisherigen Ausführungen über die Zahl erlauben uns nun, eines der schwierigsten Probleme der Logik der Mathematik zu beleuchten: das Verhältnis von Menge und Zahl. Wir stoßen dabei auf einen neuen, von der Logistik gemachten und besonders von den Mathematikern begrüßten Versuch, die Zahl aus einfacheren, logischen Begriffen abzuleiten.] -ollkommensten Formen dieser Ableitung stammen von Frege ı Russell.

Als letzte, nicht definierbare Begriffe werden dabei die uns schon bekannten Begriffe der Klasse oder Menge und der Relation genommen. Zwei Klassen sind äquivalent, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige Relation besteht. Bezeichnet xRy eine Relation und ist $\equiv$ das Identitätszeichen, dann ist die Relation eineindeutig, wenn aus xRy und $x'Ry$ folgt $x \equiv x'$ und aus xRy und xRy' folgt $y \equiv y'$. Fig. 1 zeigt eine nicht eineindeutige,

Fig. 1

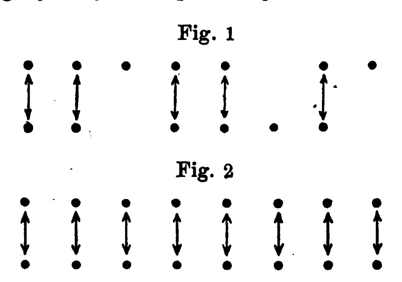


Fig. 2

Fig. 2 eine eineindeutige Zuordnung zweier Punktreihen. Nun lassen sich alle äquivalenten Klassen als Elemente ansehen, die eine eigene Klasse bilden. Eine Klasse von äquivalenten Klassen nennen wir eine Kardinalzahl. Null ist die Klasse der Klassen, die kein Element haben. Eins ist die Klasse der Klassen, denen die Null nicht zukommt und die so beschaffen sind, daß, wenn x und y zu der Klasse gehören, $x \equiv y$ ist. Zwei ist die Klasse der Klassen, die folgenden Bedingungen genügen: 1. die Null darf der Klasse nicht zukommen; 2. ist x ein Element der Klasse, dann gibt es noch ein von x verschiedenes Element y der Klasse; 3. gehören x und y als Elemente zur Klasse v und ist z ein von x und y verschiedenes Element, so ist jede Klasse, zu der z gehört, von v verschieden. Auf entsprechende Weise ist jede Kardinalzahl abzuleiten. Soviel Klassen von äquivalenten Klassen es gibt, soviel Kardinalzahlen gibt es. Mit Hilfe besonderer Definitionen werden dann diese Zahlen in eine Reihe geordnet.

Unsere bisherigen Ausführungen lassen es nun schon von vornherein als aussichtslos erscheinen, die Zahl auf rein logische Begriffe zurückzuführen. Denn die Zahl enthält etwas Quantitatives, also ein alogisches Moment. Aber auch im besonderen lassen sich vom logischen Standpunkte aus an der obigen Ableitung verschiedene Ausstellungen machen. Man kann fragen

ob denn der Begriff einer Klasse, die kein Element hat, einen Sinn besitzt. Man kann darauf aufmerksam machen, daß die Zahl nach dieser Ableitung strenggenommen keine Klasse von Klassen, d. h. kein *Umfang* eines Begriffes ist; denn die Klasse aller zweigliedrigen Klassen beispielsweise umfaßt nicht zwei, sondern unendlich viele Elemente. Die Zahl ist hier vielmehr der inhaltlich genommene Begriff einer Klasse. 2 ist der Begriff „zweigliedrige Klasse“, zu dem als Umfang alle zweigliedrigen Klassen gehören, der also das allen diesen Klassen Gemeinsame abhebt oder zusammenfaßt. Diese Unklarheit liegt im Wesen der Logistik begründet, die am Logischen immer nur die formale Seite, am Begriffe also immer nur den Umfang sieht. Anstatt daß die Zahl als selbständiger Gegenstand hingestellt wird (wie Russell es will), wird sie also doch wieder an Gegenständen abgelesen, als eine Art Abstraktion oder Abbild betrachtet. Die Logistik muß die Selbständigkeit des Gegenstandsbereiches der Zahl leugnen. Vielleicht greift man nicht sehr fehl mit der Meinung, daß sich die Ableitung als die Umdeutung einer psychologischen Theorie der Entstehung der Zahlen in eine logische Theorie der Zahl darstellt.

Weil ferner jede Zahl der Begriff einer Klasse ist, müssen die arithmetischen Operationen des Addierens, des Gleichsetzens usw in einer Weise umschrieben werden, die dem tatsächlichen Sinn dieser Operationen nicht entspricht. Es lohnt sich, das einen Augenblick zu betrachten. Jede (verschiedene) Zahl ist nach der Logistik nur einmal da. Auch das ist ja im strengen Sinne nicht richtig; denn Zahlen als Begriffe sind weder einmal noch mehrmals da, sondern sind einfach wirklich. Umfänglich genommen ist jede Zahl beliebig oft da, d. h. die Klassen, denen der Begriff einer Zahl zukommt, sind in beliebiger Anzahl vorhanden. Will die Logistik also beispielsweise die Operation $2 + 2 = 4$ deuten, so kann sie es auf zweierlei Weise tun. *Entweder* so: Ich nehme eine beliebige der Klassen, denen der Begriff „zweigliedrige Klasse“ zukommt, und vereinige sie mit einer beliebigen anderen dieser selben Klassen; dadurch entsteht eine neue Klasse, die zu dem Umfang des Begriffes „viergliedrige Klasse“ gehört. *Oder* so: Ich setze den Begriff „Zahl 2“ (oder „zweigliedrige Klasse“) zweimal und erhalte durch Vereinigung den neuen Begriff „Zahl 4“. Die *erste* Deutung beruht auf einer verfeinerten Form der in (14)

besprochenen Ansicht und verfällt deshalb zum Teil denselben Einwürfen. 2 = 2 besagt in ihrem Sinne entweder, daß der Begriff „Zahl 2“ mit sich selbst identisch ist, oder daß zwei beliebige zweigliedrige Klassen gleich sind. Aber die Klasse „2 Äpfel“ ist *nicht* gleich der Klasse „2 Birnen“. Ich kann sie natürlich als gleich *betrachten*, insofern ihnen dieselbe mit sich identische Zahl 2 zukommt. Wir haben das früher (29) Homogeneisieren genannt. Aber dadurch bekomme ich nicht 2 = 2, sondern 1 = 1. Die Deutung selbst zeigt solche Unstimmigkeiten noch klarer. *Eine* zweigliedrige Klasse plus *einer* zweigliedrigen Klasse ist gleich — etwa *einer viergliedrigen* Klasse? — durchaus nicht, sondern gleich *zwei* zweigliedrigen Klassen. Was hier als Zahl beim Zählen in Betracht kommt, liegt nicht in dem „zweigliedrig“, sondern in dem „*eine*“. In der Deutung steckt derselbe Irrtum wie in der Formel $a^2 + a^2 = a^4$. Um das ganz zu verstehen, muß man beachten, daß wir hier immanente Kritik vom Standpunkte der Logistik aus üben. Es ist selbstverständlich richtig, daß zwei Äpfel zusammen mit zwei anderen Äpfeln vier Äpfel ergeben. Das setzt, wie wir wissen, voraus, daß die Zahlen selbständige Gegenstände sind, mit denen gerechnet wird und die auf die übrige Wirklichkeit angewandt werden. Aber in der Logistik sind (mit Recht) 2 Äpfel *nicht* identisch mit der *Klasse* „2 Äpfel“ — 2 Äpfel sind 2 Gegenstände, die Klasse „2 Äpfel“ ist 1 Gegenstand —, und sie will ja prinzipiell mit *Klassen* rechnen. Tatsächlich greift sie indes bei ihrer Deutung, wie unsere Analyse zeigt, aus der Klassenauffassung der Zahl hinüber in unsere Auffassung und muß das tun, wenn sie überhaupt die arithmetischen Operationen deuten will. Man sieht hier deutlich, daß die *logische* Summe (9) von der *arithmetischen* Summe zweier Klassen verschieden ist; bei der letzteren wird wirklich gerechnet, gezählt, bei der ersteren nicht. Faßt man die logische Summe als arithmetische auf, dann rechnet man nicht mehr mit Klassen, sondern mit Elementen, denen man die Zahlen (als selbständige Gegenstände) zugeordnet hat. Die *zweite* Deutung ist nach (23) logisch ohne Sinn; außerdem findet sich auch hier der Irrtum der vorhin aufgeschriebenen Formel.

Wir wollen diese und andere Einwürfe nicht weiter ausführen, sondern zwei durchschlagende Bedenken gegen die Grundlagen r Ableitung geltend machen.

Erstens wäre selbst dann, wenn die obige Ableitung einwandfrei wäre, die Zahl nicht aus logischen, sondern aus relationstheoretischen Begriffen abgeleitet, die Mathematik also nicht auf Logik, sondern auf Relationstheorie gegründet (10).

Zweitens läßt sich zeigen, daß die Ableitung die Zahl schon voraussetzt. Wir beschränken uns darauf, das ausführlich für die eineindeutige Zuordnung und die Ableitung der Zahl 1 darzutun. Was bedeutet hier das x oder das y? Es bedeutet *ein* Element, *einen* Gegenstand. Allerdings hat besonders Russell entschieden betont, daß es sich hier nicht um das Zahlwort „*ein*“, sondern um den bestimmten Artikel „ein“ handle, den man zu jedem Gegenstande setzen könne. Aber es ist unschwer nachzuweisen, daß diese Auffassung irrtümlich ist. Es gibt nämlich eine einfache *Probe*, um zu entscheiden, ob es sich um den unbestimmten Artikel oder das Zahlwort handelt. Diese Probe besteht darin, daß man fragt, was das „ein“ *nicht* bedeuten, was es *ausschließen* soll. Der unbestimmte Artikel schließt *Gegenstände anderer Art* aus; wenn ich sage „ein Baum“, dann will ich damit einen „Menschen“, „ein Tier“ usw ausgeschlossen wissen. Das Zahlwort schließt aber *mehrere Gegenstände derselben Art* aus; wenn ich sage „*ein* Baum“, so will ich damit „zwei, drei usw Bäume“ ausgeschlossen wissen. Welcher Fall liegt bei unserer Ableitung vor? Offenbar *nicht* der erste. Wenn ich die Menge der Musen auf die Menge der Kegel beim Kegelspiel abbilden will und nun sage, daß ich „eine“ Muse „einem“ Kegel zuordne, will ich dann mit dem Worte „ein“ ausschließen, daß ich etwa meinen Hausschlüssel dem Schwanze eines sibirischen Fuchses zuordne? Sicherlich nicht; denn das ist ja schon durch die Definition der Klassen ausgeschlossen. Dagegen liegt der zweite Fall zweifellos vor. Es soll *ausgeschlossen* sein, daß x oder y *mehrere* Gegenstände bedeutet. Wollte man ganz exakt verfahren, so müßte man das *ausdrücklich* ausschließen; denn die Ableitung wäre unmöglich, wenn x oder y mehrere Gegenstände meinte[1]). Es ist also gar nicht abzuweisen, daß das „ein“ in der Ableitung das Zahlwort bedeutet. Wir haben in den beiden betrachteten Zusammenhängen nichts anderes als eine sehr interessante Umschreibung des Zahl-

---

[1]) Dann hätten wir, mengentheoretisch gesprochen, eine Belegung, keine eineindeutige Zuordnung.

wortes „*ein*“ vor uns. Die Existenz der Zahl 1 und der Mehrzahl und damit der Zahlreihe überhaupt wird dabei vorausgesetzt. Es wäre zwecklos, sich gegenüber unserem Beweise darauf zu berufen, daß das „ein“ stets gleichzeitig beide Bedeutungen *besitze*, die des Zahlwortes und die des unbestimmten Artikels. Diese Bemerkung ist ja richtig. Aber es kommt bei unserer Probe eben darauf an, zu finden, welche von den beiden Bedeutungen durch den Zusammenhang *gemeint* ist.

Man kann noch eine andere Überlegung anstellen. Die eineindeutige Zuordnung wird auch so definiert, daß man sagt, man ordne jedes Element der einen Menge einem und nur einem Element der anderen Menge zu. Diese Form der Beschreibung ist ohne Zweifel richtig; im besonderen sei bemerkt, daß sie keine *überflüssige* Bestimmung enthält. Ist sie aber richtig, dann zeigt ihr Wortlaut schon, daß in der anderen Darstellung das Zahlwort „*ein*“ nur umschrieben, die Zahl 1 also vorausgesetzt wird.

Es sei noch angefügt, daß auch andere Stellen der Ableitung die Zahlreihe voraussetzen, z. B. eineindeutige Zuordnung als Reihenordnung, die Ableitung der Zahlen 2, 3 usw, die Ordnung der durch die Ableitung erhaltenen Zahlen in eine Reihe.

Die Zahl ist also aus der Menge nicht ableitbar. Im Gegenteil setzt die Menge die Zahl voraus. Das ergibt sich ohne weiteres aus dem Begriffe der Menge (10, Anmerkung); die Ordnung durch die Relation „und“ hat, weil sie eine Reihenordnung ist, die Zahlreihe als logische Grundlage[1]). Gäbe es keine Zahl, so gäbe es keine Menge. Durch die Zahl hat die Menge quantitativen Charakter und wird dadurch ein Gegenstand, mit dem sich die Mathematik befassen kann. Die Mathematik interessiert an der Menge dasselbe, was sie auch an Zahlen und geometrischen Gebilden interessiert, nämlich das Quantitative und das Ordnungshafte. Sie *muß* bei ihrem Studium alle Mengen mit Ausnahme der Zahlmengen homogeneisieren. Denn sie kann nicht sagen, welcher Unterschied z. B. zwischen einer Menge Äpfel und einer

---

[1]) Ich bemerke für den Mathematiker, daß die Behauptung, jede Menge setze die Zahlreihe logisch voraus, durchaus nicht die Abzählbarkeit jeder Menge aussagt; auch die Nichtabzählbarkeit ist ohne Voraussetzung der Zahlreihe nicht definierbar (vgl. 10, Anmerkung). Man muß bei allen unseren Überlegungen darauf achten, daß man logische Beziehungen nicht in mathematische umdeutet.

äquivalenten Menge Kaffernweiber oder zwischen einer Menge Dreiecke und einer äquivalenten Menge Kugeln besteht, außer dem einen, daß es eben je zwei nebeneinander existierende Mengen sind; und es gibt keine Ordnung irgendwelcher Art ohne die Zahl. Alle Mengen, die die Mathematik betrachtet, mit Ausnahme der Zahlmengen, haben absolut homogene Elemente, die durch nichts als nur durch ihre Stellen verschieden sind. Die Struktur dieser Mengen wird dann mit Hilfe der Zahlmengen erforscht.

32. Die Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen. Wir haben bisher fast nur die natürlichen Zahlen berücksichtigt, sehen aber jetzt, wo wir die Zahl nach allen Seiten charakterisiert haben, die Rechtmäßigkeit der Erweiterung dieses Zahlbereiches ohne Schwierigkeit ein. Man benutzt ja in der Mathematik auch die negativen Zahlen, die Null, die Brüche, die imaginären, die komplexen Zahlen, die Quaternionen usw. Da die Zahl, wie wir wissen, von der sinnlichen Wirklichkeit vollkommen unabhängig ist, da sie selber ein Gegenstand ist, der eine eigene, selbständige Wirklichkeit für sich besitzt, so existiert alles, was in diesem Wirklichkeitsbereiche durch widerspruchloses Bilden gefunden ist, als seine rechtmäßigen, bodenständigen Gegenstände, ganz gleichgültig, ob es irgendwo und irgendwann einmal zu der sinnlichen Wirklichkeit in Beziehung gesetzt werden kann. Imaginäre oder negative Zahlen usw existieren mit *genau derselben* Rechtmäßigkeit wie die natürlichen Zahlen. Deshalb gibt es auch keine Fiktion in diesem Bereiche. Ist nur *ein* Gegenstand im Zahlbereich eine Fiktion, dann sind alle seine Gegenstände Fiktionen; ist nur einer keine Fiktion, dann sind alle keine Fiktionen. Was hier vom Zahlbereich gesagt wurde, gilt selbstverständlich, entsprechend geändert, aus genau demselben Grunde auch vom geometrischen Bereiche.

Natürlich umschließen jene Zahlgebilde noch logische Probleme. Wir können uns hier nicht weiter damit beschäftigen, weil es nur die elementarsten Wahrheiten der Wissenschaftstheorie der Mathematik darzustellen gilt.

Man hat wohl auch gemeint, man müsse der Zahl jede Beziehung zur Quantität abstreifen, um die Erweiterung des Bereiches der positiven ganzen Zahlen vornehmen zu können. Das ist ein Irrtum. Gewiß „hat die Behauptung $3 > -5$ mit

Quantitätsvorstellungen nicht das geringste gemein, sondern bedeutet nur die Ordnungsbeziehung[1]". Aber sie bedeutet eine Ordnungsbeziehung im homogenen Medium der Quantität.

33. Die Zahlen als freie Schöpfung des menschlichen Geistes. Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch den oft benutzten Ausdruck besprechen, die Zahlen seien „eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes". Sind sie das nach unserer Auffassung?

Der Ausdruck ist nicht eindeutig, nicht einmal bei seinem Urheber Dedekind. Einmal sagt Dedekind[2], man könne bei der Betrachtung eines Systems von der besonderen Beschaffenheit seiner Elemente gänzlich absehen und lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhalten. Würde dieses System in geeigneter Weise definiert, dann hießen die Elemente Zahlen; „in Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen". Bedenkt man, daß Dedekind unter Element jeden Gegenstand unseres Denkens versteht[3], so hat er mit den vorstehenden Worten in einer nicht ganz glücklichen Ausdrucksweise das gesagt, was wir das Homogeneisieren der Gegenstände nannten. Dadurch entstehen aber nicht die Zahlen, sondern werden die Gegenstände nur zählbar. Sein Ausdruck paßt also hier nicht. Übrigens geben unsere Ergebnisse noch andere Bedenken gegen seine Worte an die Hand.

Im Vorwort zur ersten Auflage der zitierten Schrift könnte man eine andere Auffassung finden, indem Dedekind die Zahlen deshalb als freie Schöpfungen des Menschengeistes zu bezeichnen scheint, weil sie rein logische Gebilde seien. Ist diese Deutung von Dedekinds Worten richtig, so paßt sein Ausdruck gerade dann *nicht*, *wenn* die Zahlen solche Gebilde sind. Denn das Reich der Logik wird so wenig frei geschaffen wie die Welt der sinnlichen Gegenstände.

Dedekind sagt weder hier noch anderswo ganz deutlich, wie er seinen Ausdruck verstanden wissen will. Wörtlich genommen würde er besagen, daß die Zahlen *nur* von uns zu einem bestimmten Zwecke geschaffene *Mittel*, nur Kunstprodukte sind,

---

[1]) Voss, Über das Wesen der Mathematik², S. 46, Anm.
[2]) Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?³ 1911, S.
[3]) Dedekind, a. a. O. S. 1 f.

die durch andere mehr oder weniger bequeme Mittel ersetzt werden können. Unsere ganzen Ausführungen wenden sich gegen diese Auffassung der Zahlen. Die Zahlen sind *auch* ein Mittel, aber sie sind in unserer Wirklichkeit das einzige, das notwendige und hinreichende Mittel, das das leistet, was es leisten soll. Sie sind aber nicht nur ein Mittel, sondern sie bilden ein selbständiges Reich mit eigenen Gesetzen, das wir weder schaffen noch zerstören, sondern nur *studieren* können. Selbst was von Subjektivem, Apriorischem, Axiomatischem, Intuitivem an der Entwicklung des Zahlbegriffs Anteil hat, ist nicht frei geschaffen, sondern beruht auf gesetzmäßigen Beziehungen, auf dem Ordnungscharakter der Wirklichkeit, und kann deshalb nicht nach Belieben geändert werden. Wie wir auch jenen Ausdruck fassen mögen, er versagt immer. Man sollte ihn besser lassen, *weil* er von Dedekind stammt.

V. Womit sich die Geometrie nicht beschäftigt

34. Der Wahrnehmungsraum. Wir gehen zu dem anderen Teil der Mathematik, zur Geometrie, über und fragen, ähnlich wie bei der Algebra, zunächst, womit die Geometrie sich nicht beschäftigt.

Die Geometrie befaßt sich erstens nicht mit dem Wahrnehmungsraum. Der Wahrnehmungsraum ist der Raum, der durch unsere Sinne unmittelbar bewußt wird: Sehraum, Hörraum, Tastraum usw. Wir charakterisieren einige von diesen Räumen ein wenig. Dem normalen Menschen am besten bekannt, von der größten Ausdehnung und für gewöhnlich der feinsten Ausbildung ist der Sehraum. Er ist begrenzt. Wir sehen nicht beliebig weit. Nach hinten sehen wir überhaupt nicht, nach oben, unten, links und rechts ist die Grenze ziemlich eng. Ein Gegenstand im Sehraum ist nicht in jeder Lage gleichwertig. So ist z. B. eine Strecke, vertikal gestellt, kürzer als horizontal; die Zahl 8, auf dem Kopfe stehend, zeigt andere Größenverhältnisse der beiden Schlingen als die richtig stehende. Die üblichen Maße sind im Sehraum unverwendbar. Es ist sinnlos, die Sehgröße eines Dinges mit 1 m anzugeben. Wohl gibt es quantitative Größenvergleichungen im Sehraum. Man kann z. B. eine Sehgröße

4*

doppelt so groß wie eine andere nennen; man sieht aber sofort, daß solche Vergleichungen ziemlich unbestimmt sind. Der Hörraum ist sehr wenig ausgebildet und weit enger begrenzt. In ihm gibt es zunächst nur Richtungen, deren Feststellung aber sehr unsicher ist. Entfernungen gibt es bei ihm nur mit Hilfe anderer Sinne. Dem Sehraum in der Ausbildung am nächsten steht der Tastraum. Er ist der begrenzteste Wahrnehmungsraum. In ihm gibt es die Erscheinung der gleichzeitigen Existenz desselben Gegenstandes an zwei verschiedenen Orten. Man berühre — es ist das ein noch von Aristoteles herrührender Versuch — eine kleine Kugel zuerst mit den in gewöhnlicher Lage befindlichen Fingern; im Tastraum ist dann *eine* Kugel. Kreuzt man Mittel- und Zeigefinger und berührt die Kugel mit diesen beiden gekreuzten Fingern, so sind zwei Kugeln im Tastraum. Sämtlichen Erscheinungsräumen ist es gemeinsam, daß sie einen absoluten Mittelpunkt haben, nämlich den Besitzer der betreffenden Sinne. Es gibt also so viele Wahrnehmungsräume, als es empfindende Wesen und Sinne gibt, mit deren Empfindungen Räumliches verknüpft ist, und alle diese zahllosen Räume sind voneinander verschieden.

Das genügt, um zu zeigen, daß die Geometrie sich mit *diesem* Raum nicht beschäftigt.

35. Der physische Raum. Die Geometrie befaßt sich zweitens nicht mit dem physischen Raume. Der physische Raum ist der Raum des Naturwissenschaftlers. Von ihm fragt er sich so wenig wie vom Körper, was er „im Grunde“ sei; er ist für ihn eben der Raum, in dem das physische Geschehen vor sich geht. Genau gesagt: in dem er es vor sich gehen *denkt*. Denn er *sieht*, *hört*, *fühlt* usw es im Wahrnehmungsraum vor sich gehen. Aber der Wahrnehmungsraum ist kein Raum, den der Physiker brauchen kann, in dem er in seinem Sinne messen und Erfahrungen sammeln kann. Er ordnet deshalb den Wahrnehmungsraum zum physischen Raum. Es kann nicht anders, er muß das tun, sonst ist der Betrieb seiner Wissenschaft, sonst ist die Erforschung der physischen Natur unmöglich. So sind die Wahrnehmungsräume Abbildungen, Transformationen des physischen Raumes. In den vielen Wahrnehmungsräumen erscheint uns der eine physische Raum.

Praktisch geht die Ordnung der Wahrnehmungen vor sich an den Körpern. Raum und Körper stehen für den Physiker im innigsten Zusammenhang. Er kann den Körper nicht definieren ohne Voraussetzung einer bestimmten Raumform. Das gilt auch für das gewöhnliche Leben. Hier wie dort wird gewöhnlich stillschweigend eine bestimmte Raumform, von der wir noch sprechen werden, vorausgesetzt. Es geht das nicht anders, und die meisten sind sich dessen gar nicht bewußt. Der Raum gibt den Dingen *seine* Struktur, und gerade dadurch ist es möglich, aus den Dingen diese Struktur zu erfahren. Wir *wissen* von der Struktur des Raumes *nur* durch die Körper. Der physische Raum ist also in genau demselben Sinne ein Naturgegenstand, ein Erfahrungsgegenstand, in dem es die Körper auch sind.

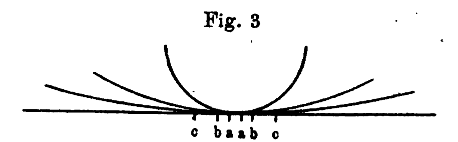
Danach ist nun leicht ersichtlich, daß die Geometrie sich nicht mit dem physischen Raume beschäftigt. Indem er voraussetzt, daß der physische Raum sich mathematisch beschreiben läßt, holt sich der Naturforscher das Modell einer solchen Beschreibung von der Geometrie, genau so wie er sich auch mit einer Anleihe an die Geometrie wendet, wenn er von seinen Naturkörpern den Inhalt oder sonst etwas berechnen will. Er nimmt sich *das* der geometrischen Raummodelle, das ihm zu seinem Naturraum gemäß den Wahrnehmungen an den Körpern am besten zu passen scheint, das sich diesen Wahrnehmungen am besten anschmiegt. Dadurch, daß er das tut, macht er eine *Hypothese* über die metrische Struktur des physischen Raumes. Trotzdem sich also die Wahrnehmungen nur ordnen lassen auf Grund, unter Voraussetzung einer Raumform, können doch, je nachdem die Wahrnehmungen sich der Ordnung und Deutung durch diese bestimmte Raumform fügen oder nicht, in der Erfahrung an den Körpern auch Erfahrungen über die metrische Struktur des Raumes gemacht werden.

Weil diese Dinge noch sehr viel mißverstanden werden und weil außerdem das Vorstehende noch einiger Erläuterungen bedarf, seien ein paar Worte über die Erfahrungen gesagt, die man bisher über die metrische Struktur des physischen Raumes gemacht hat. Bis in die Neuzeit hinein hat der Physiker stets als Modell zur Beschreibung seines Raumes den Raum benutzt, den die Schulgeometrie heute noch zugrunde legt, nämlich den euklidischen Raum. Ein Charakteristikum dieses Raumes besteht darin, daß

in ihm die Summe der Winkel eines ebenen Dreiecks gleich $2R$ ist. Außer ihm gibt es noch zwei Arten von hier in Betracht kommenden Räumen: bei der einen ist die Winkelsumme jedes ebenen Dreiecks größer als $2R$, bei der anderen kleiner. Um wieviel größer oder kleiner, hängt, außer von der Länge der Seiten des Dreiecks, auch von einer gewissen, für jeden dieser Räume charakteristischen Größe (dem Krümmungsmaße) ab, die beim euklidischen Raume gleich 0, bei den anderen Räumen positiv oder negativ ist.

Wie nun der Physiker das Modell für seinen physischen Raum, das er sich aus diesen mathematischen Räumen auswählen will, an der Erfahrung prüft, mag durch einen *Vergleich* erläutert werden. Wir denken uns eine Ebene und eine Kugel, die sich

Fig. 3



berühren. Fig. 3 gibt einen Durchschnitt. Der Radius der Kugel sei r. Um den Berührungspunkt sei auf der Kugel ein sphärisches Dreieck gezeichnet, dessen Winkelsumme bekanntlich stets größer als $2R$ ist. Denkt man sich die Kugel immer größer werdend, während die Seiten des Dreiecks gleich lang bleiben, dann werden sich diese Seiten immer mehr einer Geraden und die sphärische Fläche des Dreiecks immer mehr einer Ebene nähern, um so mehr, je kleiner der reziproke Wert $1/r$ wird. Ist $1/r = 0$, dann ist die Kugel in die Ebene übergegangen und die Winkelsumme des Dreiecks ist $2R$. Je kleiner $1/r$ wird, eine desto größere Fläche der Kugel wird *annähernd* eben; in der Figur sind aa, bb, cc stets größere Stücke, innerhalb derer Gerade und Kreis annähernd zusammenfallen. Will also ein Beobachter, der auf der Kugeloberfläche lebt, entscheiden, ob er auf einer solchen lebt oder nicht, und zu dem Zwecke ein Dreieck auf seine Winkelsumme ausmessen, dann muß er um ein so größeres Dreieck nehmen, je kleiner $1/r$ ist.

Analog ist es in unserem Falle. Alle bisherigen Erfahrungen haben gezeigt, daß der physische Raum nicht sehr viel von ei euklidischen Raum verschieden sein kann. Will man sich

praktisch durch Ausmessen eines Dreiecks vergewissern, ob seine Winkelsumme von $2R$ abweicht, ob also das Krümmungsmaß des Raumes von 0 verschieden ist oder nicht, so muß man möglichst große Dreiecke wählen. Diese Ausmessungen sind in einem Falle gemacht worden. Gauß hat das geodätische Dreieck Hohenhagen-Brocken-Inselsberg mit den Seitenlängen von 69, 85 und 107 km benutzt. Das Ergebnis war, daß die Abweichungen der Winkelsumme von $2R$ innerhalb der Versuchsfehler bleiben; es entscheidet also nicht. Astronomische Überlegungen haben dann noch gezeigt, daß, wenn der physische Raum ein nichteuklidischer Raum ist, sein Krümmungsmaß nur sehr wenig von 0 verschieden ist, daß wir also wohl schwerlich hoffen dürfen, selbst durch Ausmessung von größeren Dreiecken, als geodätische es sind, einmal eine Entscheidung herbeizuführen. Sicherlich wird deshalb das Modell des euklidischen Raumes nicht nur für das gewöhnliche Leben, sondern auch für die elementare Physik und die Technik stets verwendbar bleiben. Sein Vorrecht beruht auf seiner Einfachheit und Bequemlichkeit für die gewöhnlichen Bedürfnisse. An sich sind sämtliche geometrische Raumformen, soweit sie nicht nur den Mathematiker interessieren, gleichberechtigt, zur Ordnung der Wahrnehmungen benutzt zu werden. Wir schließen damit durchaus nicht, wie Bauch meint[1]), aus der widerspruchslosen Definition auf die Existenz des Definierten. Die mathematische Existenz der Raumformen ist klar, *eine andere gibt es für sie nicht.* Eben *deshalb* sind sie an sich in den Augen des Physikers *gleichwertig.* So kann denn Bauch auch nicht den geringsten Grund für seine Behauptung anführen, daß nur die Anwendung der euklidischen Form Wirklichkeitserkenntnis ermögliche. Er mag — wie auch Kant — zum Teil durch seine Verwechselung von historischem und logischem Vorrecht zu dieser Meinung gekommen sein. Aber die eigentliche Quelle seines Irrtums steckt in der seltsamen Auffassung der „Gleichwertigkeit", die er so versteht, als ob man beliebig denselben Gegenstand der Erfahrung in dieser oder in jener Raumform sehen könne.

So lagen die Verhältnisse bis in die jüngste Zeit. Die Relativitätstheorie ist nun heute zu der Überzeugung gekommen,

---

[1]) B. Bauch, Studien zur Philosophie der exakten Wissenschaften, S. 129 f.

daß die Körper eine Abhängigkeit vom Raume besitzen, die durch die Verwendung der euklidischen Raumform nicht mehr beschrieben werden kann. Körper und Raum sind überhaupt nicht unabhängig voneinander, auch nicht für die euklidische Raumform. Aber die Abhängigkeit, die diese Raumform in sich faßt, reicht eben nicht mehr aus. Wir sind gezwungen, auf andere Raumformen zurückzugreifen und entsprechend dem Verhalten der Körper die passende zu wählen. Natorp[1]) hat „bewiesen", daß die euklidische Raumform die einzige Möglichkeit der eindeutigen Bestimmbarkeit zeiträumlicher Verhältnisse ist; inzwischen rechnet die Physik ruhig nicht nur nichteuklidisch, sondern läßt sogar im Innern der Sonne die Geometrie eines Raumes mit positivem Krümmungsmaß, anderswo andere Geometrien gelten.

Ob sich diese Ergebnisse alle halten werden oder nicht, ist uns gleichgültig. Unsere Ausführungen sollen nur ganz deutlich machen, daß es sich hier um *physikalische* Probleme handelt. Mit dem Raume der Naturwirklichkeit hat die Geometrie nicht das mindeste zu tun. Irgendwelche Erfahrungen und Versuche über die Struktur dieses Raumes berühren sich gar nicht. Sie steht über all diesen Erfahrungen in der vollen Unabhängigkeit eines anderen Gegenstandsbereiches. Wenn die Physik den Naturraum untersuchen und beschreiben will, muß sie sich die Mittel dazu von der Geometrie leihen.

VI. Womit sich die Geometrie beschäftigt

36. Der Gegenstand der Geometrie. Die Geometrie beschäftigt sich mit den geometrischen Gegenständen, wie Punkt, Gerade, Ebene, dreidimensionaler Raum usw. Man kann für alle diese Gegenstände auch den Namen *Räume* einführen und diese Räume dann nach ihren Dimensionen, ihrem Krümmungsmaß, ihrem Zusammenhang und nach anderen Gesichtspunkten unterscheiden. Gebilde wie Dreieck, Rechteck, Würfel, Ikosaeder usw entstehen durch bestimmte Beziehungen zwischen Räumen.

Da wir die allgemeine Charakterisierung der Gegenstände der Geometrie schon früher (4) gegeben haben, genügen hier einige Bemerkungen.

[1]) P. Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften 1910, S. 303 ff.

Es sei zunächst hervorgehoben, daß es zwar Begriffe von diesen Gegenständen gibt, daß sie selbst aber keine Begriffe sind, genau so wie es einen Begriff des Hundes gibt, die Hunde aber keine Begriffe sind. Die Geometer *wußten* längst, was Punkt, Gerade, Ebene waren und benutzten diese Gebilde ohne einen Irrtum, ehe es gelang, sie begrifflich zu fassen. Ob schließlich überhaupt eine einwandfreie begriffliche Fassung von ihnen möglich ist, ist eine Frage; vielleicht bleibt immer des Augustinus Antwort auch hier die beste: Wenn du mich fragst, so weiß ich es nicht; wenn du mich nicht fragst, dann weiß ich es. Diese Zustände sind mit ein Beweis dafür, daß diese Gebilde keine Begriffe, sondern Gegenstände sind. Aus diesen drei Gebilden baut die Geometrie alle übrigen auf durch Konstruktion oder mit Hilfe der Analysis. Das ist aber, wie schon an anderer Stelle (11) hervorgehoben wurde, nicht so zu verstehen, als ob die neuen Gebilde dadurch geschaffen würden; sie werden nur dadurch *gefunden*.

Die geometrischen Gegenstände existieren genau wie die Zahlen in beliebiger Anzahl. Das folgt allein schon aus dem Sachverhalt der Kongruenz. Gewisse geometrische Verfahrungsweisen müssen entsprechend gedeutet werden. Wenn ich z. B. in einem Dreieck zum Zwecke eines Beweises eine Hilfslinie ziehe, so habe ich dem Dreieck nichts Neues hinzugefügt. Das Hinzufügen findet nur in der sinnlichen Wirklichkeit des Zeichenblattes statt. In dem unsinnlichen mathematischen Gegenstandsbereich existieren unendlich viele Linien, aus denen ich nur die für meinen Zweck passende heraussuche. Der Begriff eines geometrischen Gegenstandes existiert nur einmal, oder besser, er ist einfach identisch mit sich selbst da; derselbe Gegenstand aber ist beliebig oft da. Man hat dieser Sachlage teilweise schon früher durch Aufstellung des sogenannten geometrischen Existenzprinzips Rechnung getragen, ohne es recht begründen zu können. Wir wissen jetzt, daß wir dieses Prinzip zu einem *mathematischen Existenzprinzip* erweitern müssen und daß es seine Grundlage in der Selbständigkeit und dem Charakter (24) des Gegenstandsbereiches der Mathematik findet.

37. Die Homogeneität im Bereiche der geometrischen Gegenstände. Der Begriff der Homogeneität ist in seinem ersten Merkmal (30) hier deshalb schwer zu fassen, weil er fast nichts

mit dem Begriff der Homogeneität zu tun hat, den man in der Geometrie zu benutzen pflegt. Man nennt in der Geometrie (ob zweckmäßig oder nicht, ist uns gleichgültig) auch drei- und mehrdimensionale Räume homogen oder nichthomogen. Aber für uns sind diese Räume nichts als Gegenstände des homogenen Gebietes der mathematischen Wirklichkeit; ihre Struktur kommt für uns nicht in Betracht. Um das erste Merkmal der Homogeneität richtig zu verstehen, muß man sich vielmehr stets vor Augen halten, daß der Homogeneitätsbegriff das Gegenstück des Heterogeneitätsbegriffes darstellt. Das erste Merkmal der Heterogeneität bedeutet, daß zwischen zwei Gegenständen derselben Klasse, z. B. zwei Baumblättern, zwei Menschen, niemals absolute Gleichheit besteht; wir können stets ein Exemplar einer Klasse finden, das uns etwas Neues lehrt. Dagegen sind z. B. *alle* Kreise von demselben Radius, *alle* Ellipsen mit denselben Achsen, allgemein *alle* Kurven mit derselben Funktion und denselben Konstanten unter sich absolut gleich. Wir sind sicher, daß wir niemals ein *Exemplar* eines Kreises von *bestimmtem* Radius finden werden, das uns etwas Neues lehrt. Und das gilt, weil ja alle Gegenstände der Geometrie in beliebiger Anzahl wirklich sind (36), von *jedem* Gegenstand. Das erste Merkmal des Homogeneitätsbegriffes ist allgemein nur ein anderer Ausdruck des mathematischen Existenzprinzips (24). Heterogeneität macht Erfahrung möglich, Homogeneität schließt jede Erfahrung vollkommen aus. Man darf demgegenüber nicht darauf hinweisen, daß man doch beispielsweise stetige Kurven ohne Tangenten gefunden, also etwas Neues zum Kurvenbegriff gelernt hat. In diesem Falle hat uns nicht ein neues *Exemplar* etwas gelehrt, was andere Exemplare nicht besitzen, sondern man hat neue Klassen von Gegenständen entdeckt, innerhalb derer die Gegenstände mit derselben Funktion und denselben Konstanten unter sich absolut gleich sind. Wenn man also von der Gleichheit geometrischer Gegenstände spricht, so *muß* man sich diese Gegenstände *nicht* nebeneinander als Gebilde in *demselben* Raume (Kongruenz) denken. Eine solche Gleichheit gibt es zwar auch in gewissen Räumen der Geometrie, und unser Homogeneitätsbegriff schließt sie ein. Er sagt aber allgemein aus, daß wir nie ein *Exemplar irgend eines* geometrischen Gegenstandes finden werden, an dem wir nicht *alles* studieren können, was an der Klasse der das Exemplar gehört, überhaupt zu studieren möglich is

Daß das zweite Merkmal des Homogeneitätsbegriffes hier vorliegt, ist schon früher (30) kurz gezeigt worden und ist auch ohne Schwierigkeit einzusehen.

38. Geometrie und Zeit. Die Frage der Beziehung zur Zeit erhebt sich auch hier, nur in einem etwas anderen Sinne wie bei der Algebra. Es handelt sich nämlich um das Problem, ob die Geometrie den Bewegungsbegriff entbehren kann oder nicht. Wir sind an dieser Stelle imstande es zu lösen.

Wir setzen zunächst fest: Selbst wenn die Geometrie den Bewegungsbegriff nicht entbehren kann, dann ist der Begriff nicht Gegenstand der Geometrie, sondern nur Hilfsmittel. Die Zeit ist also auch weder Gegenstand der Geometrie noch ein Moment an einem solchen.

Aber der Bewegungsbegriff erscheint restlos entbehrlich. Wir können ihn zwar ohne Anstand in Beweisen benutzen und von Aufeinanderlegen, Verschieben, Drehen usw der Gebilde sprechen. Das sind alles nur aus der sinnlichen Anschauungssphäre hergenommene Bequemlichkeitsausdrücke. In Wirklichkeit — d. h. in der Wirklichkeit des mathematischen Gegenstandsbereiches — liegt die Sache anders. Das Aufeinanderlegen z. B. zweier Dreiecke zum Nachweis der Kongruenz bedeutet hier, daß ich am Orte des einen Dreiecks ein ihm gleiches nehme, was ich auf Grund des Existenzprinzips darf. Das Drehen eines Koordinatensystems besagt, daß ich mir ein mit dem Ausgangssystem gleiches System in der gewünschten Lage auf Grund dieses Prinzips wähle. Entsprechend in anderen Fällen. Vorausgesetzt ist immer die durch die Kongruenz definierte Homogeneität des Mediums. Wo man also von Bewegung in der Geometrie spricht, da handelt es sich lediglich um ein Anbequemen an unser Tun im physischen Raum. Innerhalb der mathematischen Wirklichkeit läßt sich das alles reduzieren auf die Benutzung des Homogeneitäts- und des Existenzprinzips.

39. Die Quantität im geometrischen Gegenstandsbereich. Daß die Quantität eine Kategorie im geometrischen Gegenstandsbereich ist, ist wohl zweifellos. Ebenso zweifellos aber auch, daß sie es in einem anderen Sinne als bei der Zahl ist. Bei der Zahl lelt es sich um die reine Quantität, abgesehen von allen fischen Gestaltungen. Bei den geometrischen Gebilden aber

kommt die Quantität in einer ihrer spezifischen Ausgestaltungen in Frage, in der räumlichen. Räumlichkeit ist wie alle letzten Begriffe nicht definierbar. Wir wollen nur einige Momente daran herausheben, die zusammen die räumliche Quantität charakteristisch von den anderen Quantitäten scheiden. Es sind die folgenden: 1. Das eigenartige undefinierbare räumliche *Auseinander* (das zeitliche Kontinuum hat das *Nacheinander*, der Zahlbereich das *Nebeneinander*). 2. *Stetigkeit.* Hier besonders muß man jede Beziehung zur Anschauung und Vorstellung fernhalten. Für die Anschauung ist fließendes Wasser auch lückenlos. Stetigkeit bedeutet, wie wir schon wissen (26), den Ausschluß jeder Diskretheit, jeder Geteiltheit oder Zusammengesetztheit, der notwendig ist, weil jede Diskretheit Grenzen bedeutet, es aber niemals Grenzen des Raumes, sondern nur Grenzen im Raume geben kann. 3. *Teilbarkeit.* Nicht alle stetigen Quantitäten ermöglichen die Teilbarkeit, z. B. die des Psychischen nicht. Es hat keinen Sinn, die Intensität der Empfindung eines Tones oder Lichtes zu teilen oder sie sich zusammengesetzt zu denken. Auch die Quantität gewisser physikalischer Größen gehört zu denjenigen, die eine Teilbarkeit ausschließen. Von Teilen der Dichte, der Temperatur, des elektrischen Potentials zu reden, ist beispielsweise ebenfalls ohne Sinn. Daß in allen diesen Fällen kein Messen im eigentlichen Sinne möglich ist, ist klar. Darauf können wir nicht näher eingehen.

Auch hier ist die räumliche Quantität nicht Gegenstand der Geometrie, sondern Gegenstand sind die geometrischen Gebilde, und studiert werden ihre Beziehungen, die durch die Eigenschaft der räumlichen Quantität ermöglicht sind.

40. Geometrie und Anschauung. Wie die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, besitzen die geometrischen Gegenstände nicht nur alogisches Material, sondern sogar noch mehr alogisches Material als die Zahl. Nun hat man aber in einer ganz anderen Weise versucht, den rein logischen Charakter der Geometrie zu erweisen.

Die Grundgebilde der gewöhnlichen, in der Schule gelehrten Geometrie bilden die Grundgebilde nullter, erster und zweiter Stufe: Punkt, Gerade, Ebene. Diese Grundgebilde haben Beziehungen zueinander, z. B.: zwei voneinander verschiedene Punkte

bestimmen stets *eine* Gerade; wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A. Unter ihren sämtlichen Beziehungen gibt es welche, wie z. B. die beiden vorhin genannten, die sich nicht beweisen lassen, deren Richtigkeit wir unmittelbar einsehen. Wir nennen sie Axiome. Sucht man nun alle diese Axiome, bringt sie auf den kürzesten Ausdruck und sieht zu, daß kein Widerspruch unter ihnen besteht, dann hat man in ihnen und den Grundgebilden die Grundlage für den Aufbau der Geometrie. Nun ergibt sich aber das Merkwürdige, daß die Grundgebilde durchaus nicht Punkt, Gerade, Ebene im gewöhnlichen Sinne zu sein brauchen. Es brauchen nur drei Arten von Gegenständen zu sein, auf die die Axiome in verallgemeinerter Form Anwendung finden können. Ich wähle folgendes Beispiel [1]). Wir nehmen das erste vorhin genannte Axiom und ziehen daraus die Folgerung, daß zwei Gerade entweder nur einen oder keinen Punkt gemeinsam haben. Nun verallgemeinern wir. Als Grundgebilde seien eine Menge aus zwei schwarzen und eine Menge aus zwei weißen Kugeln gegeben. Jede einzelne schwarze Kugel darf beliebig viele weiße berühren, und umgekehrt. Aber die beiden schwarzen dürfen gemeinsam nur *eine* weiße berühren. Daraus folgt dann, daß die beiden weißen Kugeln entweder nur eine oder keine schwarze Kugel gemeinsam berühren können. Man sieht: unter den Grundgebilden nullter, erster und zweiter Stufe kann man sich denken, was man will; stehen diese Gegenstände nur in den Beziehungen, in denen Punkt, Gerade, Ebene stehen, dann ist der Aufbau der Geometrie möglich. Als Grundgebilde nullter Stufe kann man z. B. den Kreis oder die Kugel oder auch das System von drei geordneten, d. h. in einer bestimmten Reihenfolge genommenen Zahlen nehmen. Daraus scheint zu folgen, daß die Geometrie von der Anschauung ganz unabhängig, daß sie also eine rein logische Wissenschaft ist.

Was ist dazu zu sagen? Ich möchte nun auch glauben, daß das wissenschaftliche System der Geometrie ohne Anschauung auskommen kann, wenn auch die Anschauung bei der Bildung der Gegenstände der Geometrie eine große Rolle gespielt hat und sie in der elementaren Geometrie aus didaktischen Gründen not-

[1]) Killing-Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, 1. Bd., 1910, S. 2.

wendig spielen muß. Auch als Stimulans, als Hilfsmittel bei der Forschung ist sie für manche unentbehrlich; es gibt Mathematiker, die bei den abstrakten Überlegungen der Zahlentheorie anschauliche Hilfen brauchen. Aber schon bei den Grundgebilden im gewöhnlichen Sinne ist die Anschauung unmöglich. Einen Punkt, wie die Geometrie ihn fordert, eine unendliche Gerade, zwei Parallelen gibt es in der Anschauung nicht. Erst recht nicht komplizierte geometrische Gebilde, z. B. stetige Kurven, die nirgends eine Tangente haben, oder Kurven, die in einem endlichen Intervall unendlich viele Maxima und Minima besitzen. Wohl kann eine Art von ungenauer Vorstellung oder eine Zeichnung Stellvertreter oder Symbol für viele geometrische Gegenstände sein. Selbst wenn wir aber auch die Anschauung ganz aus der Geometrie verbannen, ist die Geometrie keine rein logische Wissenschaft.

Erledigen wir zum Beweise zunächst den Fall, auf den wir noch in anderem Zusammenhange zu sprechen kommen, wo nämlich die Geometrie analytisch aufgebaut wird (42). Hier handelt es sich um Zahlen. Zahlen enthalten aber, wie wir wissen, alogische Momente.

Dazu kommt noch, daß das Räumliche dabei nur formell ausgeschaltet ist. Warum nimmt man die drei Zahlen gerade in dieser Ordnung? Zahlen sind doch schon an sich geordnet. Warum darf man diese Ordnung nicht ändern? Warum ist gerade diese und keine andere Funktion die Entfernung? Es stehen doch beliebig viele Funktionen zur Verfügung. — Das alles hat nur dann einen Grund und einen Sinn, wenn diese Art, Geometrie zu treiben, implizite das Dasein der räumlichen Gebilde voraussetzt und sie tatsächlich, wenn auch nicht ausdrücklich, nur beschreibt.

In sämtlichen anderen Fällen wäre die Geometrie rein logisch, wenn die Grundgebilde rein logische Gegenstände wären. Daß sie das nicht sein können, ist nach dem Früheren klar. Im rein logischen Medium gibt es keine drei Klassen von Gegenständen, sondern nur *einen* Gegenstand, der die einzige Beziehung hat, daß er mit sich selbst identisch und von anderen verschieden ist. Die Unanschaulichkeit der Geometrie besagt also auch hier keinen rein logischen Aufbau.

Ja sie besagt hier nicht einmal die Ausschaltung alles R[illegible]lichen aus dem System der Geometrie. Wenn auch Punkt, Ge[illegible]

Ebene der gewöhnlichen Geometrie nicht anschaulich sind, so besitzen sie doch räumlichen Charakter. Bisher hat man noch in keinem Falle des Aufbaues einer Geometrie von allem Räumlichen in den Grundgebilden und infolgedessen auch bei ihren in den Axiomen ausgedrückten Beziehungen abstrahieren können. Sollte das aber einmal restlos gelingen — und es ist nicht einzusehen, warum nicht —, *dann hätten wir keine Geometrie mehr, sondern ein Kapitel der Relationstheorie*, das zur Geometrie würde, wenn die Fundamente der Relationen räumlichen Charakter annähmen. Das vorhin benutzte Beispiel läßt sich leicht in diese allgemeine Form bringen. Gegeben eine Menge 1 mit n, eine Menge 2 mit n' Elementen ($n' \geqq n / 2$). Jedes einzelne Element der einen Menge kann mit beliebig vielen der anderen in Relation stehen. Zwei Elemente der Menge 1 können aber gemeinsam nur mit einem Element der Menge 2 in Relation stehen. Dann folgt, daß zwei Elemente der Menge 2 gemeinsam nur mit einem oder mit keinem Element der Menge 1 in Relation stehen können. Wie man sieht, ist diese Aufgabe unschwer mit Hilfe der Klassenrechnung der Logistik zu lösen, gehört also in die Relationstheorie.

Ein äußeres Zeichen dafür, daß wir hier und in analogen Fällen in einem *anderen* Wissenschaftsgebiet sind, sehen wir darin, daß das, was bei den räumlichen Grundgebilden ein Axiom war, hier eine willkürliche Festsetzung ist.

Die ideale Geometrie im Sinne der Axiomatiker wäre demnach aufgebaut auf einem Tripel unbestimmter Elemente, zwischen denen Beziehungen walten, die durch die denkbar größte Verallgemeinerung der zwischen den elementar-geometrischen Grundgebilden herrschenden Beziehungen gewonnen sind. Entsprechend könnte man aus der Logik ein Stück Werttheorie machen. Es liegt aber ganz sicher im Interesse der Wissenschaften selber, daß solche Grenzverwischungen vermieden werden. Genau so gut, wie man nur das Algebra nennen sollte, was auf der Zahl aufgebaut ist, sollte man auch nur dann von Geometrie reden, wenn die in Beziehung gesetzten Elemente ideale *räumliche* Gegenstände sind.

41. Geometrie und physische Wirklichkeit. Wie ist die Anwendung der Geometrie auf die physische Wirklichkeit möglich?

Die sinnlichen Gegenstände, auf die Geometrie angewandt ...on kann, besitzen mit mehr oder weniger großer Annäherung

die Form von geometrischen Gegenständen. Es liegt deshalb eine eigentümliche Mischung der Heterogeneität des sinnlichen Bereiches mit der Homogeneität des geometrischen insofern vor, als die sinnlichen Gegenstände als Umfänge mit nicht immer anderem und mit nicht unübersehbarem Inhalt *betrachtet* werden können (29). Man braucht also die Heterogeneität im sinnlichen Bereiche nur teilweise aufzuheben, um die Anwendung der Geometrie zu ermöglichen. Das Homogeneisieren, das hier nötig ist, ist nur ein Homogeneisieren im relativen Sinne. Wo die Zahl angewandt werden soll, muß absolut homogeneisiert werden, muß also alle Heterogeneität abgestreift werden, soweit das überhaupt möglich ist, so daß die Gegenstände nichts anderes mehr sind als bloße Stellen im homogenen Medium. Die physischen Gegenstände sind also mit den geometrischen offenbar näher „verwandt" als mit der Zahl.

42. Arithmetisierung der Geometrie. Die nähere „Verwandtschaft" zwischen geometrischen Gebilden und physischen Gegenständen legt den Gedanken nahe, die Geometrie als Anwendungsgebiet der Zahl anzusehen, d. h. man betrachtet die Zahl als *den* Gegenstand der Mathematik und sieht in der Geometrie angewandte Mathematik. Diese Arithmetisierung der Geometrie, die wir schon in (40) streiften, gewinnt heute immer mehr Liebhaber unter den Mathematikern.

Wer analytische Geometrie versteht, wird sich leicht damit zurechtfinden; nur muß er beachten, daß mit der analytischen Geometrie eine Wendung vorgenommen wird. Ich gebe kurz zur Probe die Ansätze für einen bestimmten Fall.

Ein System von drei geordneten, d. h. in ihrer Reihenfolge nicht vertauschbaren Zahlen x, y, z *ist* ein Punkt. Man achte auf den Unterschied von der analytischen Geometrie. Wir stellen nicht einen Punkt durch drei Zahlen dar, sondern in dem System dieser drei Zahlen ist alles enthalten, was die euklidische Geometrie vom Punkte voraussetzt. Die Entfernung zweier Punkte $(x_1, y_1, z_1;$ $x_2, y_2, z_2)$ *ist*

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Die Ebene *ist* der Inbegriff aller Zahlentripel x, y, z, die der Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

gehorchen, wo *a, b, c, d* numerische Koeffizienten sind, die nicht alle gleichzeitig Null werden dürfen. Die Punkte, die zwei Ebenen gemeinsam haben, bilden eine Gerade. Die *x, y, z* der Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

sind also eine Gerade. Der Inbegriff aller Punkte *ist* der Raum von drei Dimensionen. *Jeder* Raum (36) *ist* also eine Punktmannigfaltigkeit.

Indem man *n* geordnete Zahlen nimmt und komplexe Zahlen zuläßt, kann man die größte Allgemeinheit dieser Geometrie erlangen.

Man darf aber einen wichtigen Unterschied hier nicht übersehen. Das ist wohl der vollkommenste Aufbau der Geometrie für *mathematische* Zwecke, der möglich ist. *Logisch* aber sind die geometrischen Gebilde einer Gruppe von Gegenständen, die als eine selbständige, eindeutig und unabhängig von den Zahlen definierte Gruppe neben die Zahlen tritt. Alles, was der Mathematiker von ihnen braucht, kann er in vollkommenster Weise durch die Zahl ausdrücken. Aber damit sind sie nicht *vollständig* charakterisiert. Wir wollen diesen Unterschied an dem Begriff der Stetigkeit erläutern. Wir hörten schon mehrmals, daß die Stetigkeit ein letzter, aber vollständig deutlicher Begriff sei, der jede Geteiltheit, jede Zusammengesetztheit, jede Mannigfaltigkeit, jede Struktur ausschließe. Nur wenn man den Raum als Punktmannigfaltigkeit faßt, kann man fragen, wie diese Mannigfaltigkeit strukturiert ist. Der Mathematiker kann auf diese Weise das, was er besonders für die Anwendung seiner Wissenschaft auf Stetiges braucht, eindeutig umschreiben, aber das Wesen des Stetigen hat er damit nicht beschrieben.

Vom logischen Standpunkte aus zerfällt also die Mathematik in die zwei selbständigen Bereiche der Algebra und Geometrie. Vom mathematischen Standpunkte aus kann die Geometrie als angewandte Mathematik angesehen werden, nur in einem ganz anderen Sinne angewandt, als wenn es sich um die Beziehung des Zahlbereiches zur Wirklichkeit handelt.

43. Die Gewißheit der Mathematik. Die Mathematik hat vor den meisten anderen Wissenschaften den Vorzug voraus, daß alle ihre Schlüsse mit absoluter Sicherheit ziehen kann. Worin ist diese Gewißheit begründet?



Sie kann nicht an der axiomatischen Natur der Mathematik liegen, wie uns die Kritik der axiomatischen Auffassung der Geometrie (40) gelehrt hat. Denn einmal wird es schwerlich eine Wissenschaft geben, die keine Axiome nötig hat, und zweitens hängen die Aussagen, die die Axiome enthalten, von dem Charakter der Gegenstände ab, mit denen sich die Wissenschaften beschäftigen.

Wir finden den Grund für die Gewißheit der Mathematik, wenn wir nach Wissenschaften suchen, die die gleiche Gewißheit gewähren, und dann die Übereinstimmungen zwischen den Gegenständen dieser Wissenschaften abheben. Als einzige Wissenschaft von gleicher Gewißheit stellt sich die Relationstheorie dar.

Die Relationstheorie studiert das Symbol R (a, b, c . . .). In welchem Medium liegen dabei die *Fundamente* der Relationen, also die a, b, c . . .? Das Medium muß offenbar *beliebig viele* Stellen oder Gegenstände haben, die die Relationstheorie mit den Buchstaben belegt. Diese Belegung mit Buchstaben hat eine eigenartige logische Struktur, die wir uns an dem analogen Verfahren der Algebra klar machen können. Wir wissen (52, Anmerkung), daß die a, b, c . . . in der Algebra keine Klassenbegriffe sind. Sonst könnten nicht in demselben Ausdruck mehrere Buchstaben vorkommen, von denen jeder nicht den Gegenstand des anderen bezeichnet. Ich kann nicht den Begriff „Hund" bilden und darunter alle Hunde mit Ausnahme von „Karo" verstehen. Die Buchstaben der Algebra sind gleichzeitig allgemein und konkret. Es liegt in ihnen eine eigenartige Mischung von Homogeneität und Heterogeneität. a bedeutet *jede* Zahl der Zahlreihe in ihrer *konkreten Bestimmtheit.* In dem „jede" liegt das homogene, in der „konkreten Bestimmtheit" das heterogene Moment. Dieses Homogeneisieren der Algebra ist natürlich ein Homogeneisieren von *mathematischen* Gegenständen, es ist nicht das Homogeneisieren, das die Mathematik bei ihrer Anwendung auf die sinnliche Wirklichkeit vornimmt, aber von demselben logischen Charakter.

Was nun die Algebra mit den Zahlen der Zahlreihe tut, das tut die Relationstheorie mit den Gegenständen überhaupt. In ihren Buchstaben, trotzdem sie nicht dasselbe bedeuten wie die der Algebra, liegt auch eine Mischung von Allgemeinheit und Konkretheit. Die Allgemeinheit entsteht durch das Homogeneisieren in dem Sinne, in dem wir es früher (29) kennen lernten.

Dieses Medium der Fundamente der Relationen, das offensichtlich vom logischen Medium verschieden ist, ist ordnungslos. In ihm schafft die Relationstheorie Ordnung, indem sie Relationen zwischen den Gegenständen setzt.

Die Ordnung, die die Mathematik in sich faßt, ist ein Ausschnitt aus der Ordnung durch die Relationstheorie, der dadurch bestimmt ist, daß die Mathematik die Fundamente der Relationen in das *homogen-quantitative* Medium setzt. Andere Wissenschaften machen andere Ausschnitte aus der Ordnung durch die Relationstheorie je nach dem Medium, in dem ihre Gegenstände stehen. Diese Ausschnitte können sich natürlich durchkreuzen.

Alle Wissenschaften beschäftigen sich mit Relationen. Relationstheorie und Mathematik stimmen nun darin überein und unterscheiden sich dadurch von allen anderen Wissenschaften, daß sie die *Relationshaltigkeit homogener Gegenstände* erforschen. Darin muß also der Grund für ihre Gewißheit liegen. Jede Wissenschaft wird überall da ebenso gewisse Resultate ergeben, wo sie Relationstheorie oder Mathematik anwenden kann, z. B. die Logik in der Symbolik der Begriffe, Urteile und Schlüsse, die theoretische Physik. Daß in der Homogeneität der tiefste Grund für die Gewißheit liegt, ist nicht weiter verwunderlich; denn homogene Gegenstände sind einfache Gegenstände, die in ihren Beziehungen viel klarer erfaßbar sein müssen als Gegenstände mit unübersehbarem Inhalt.

Fassen wir das Vorstehende mit früherem (10) zusammen, so werden uns die Beziehungen zwischen Logik, Relationstheorie und Mathematik vollständig klar sein.

44. Übersicht über die typischen Kategorien des mathematischen Gebietes. Ich gebe noch eine Übersicht über die typischen Kategorien des mathematischen Gebietes und setze zum

Kategorien des Bereiches			
der Werte	der Relationen	der Zahl	der geom. Gebilde
1. Gelten	1. Ideales Sein	1. Ideales Sein	1. Ideales Sein
2. Zeitlosigkeit	2. Zeitlosigkeit	2. Zeitlosigkeit	2. Zeitlosigkeit
3. Heterogeneität	3. Heterogeneität	3. Homogeneität	3. Homogeneität
—	4. Relationssein	4. Quantität	4. Quantität
—	—	—	5. Räumlichkeit

Vergleiche diejenigen des Relations- und des Wertgebietes hinzu; zu dem letzteren gehört ja auch der Gegenstand der Logik. Es mögen dabei u. a. die Fragen offen bleiben, ob die „Zeitlosigkeit" nach (5) nicht noch zerlegt oder anders ausgedrückt werden muß und ob die Heterogeneität wirklich eine Kategorie des Relationsgebietes ist (30).

VII. Ob die Relativitätstheorie die Physik zur Geometrie macht

45. Die Entwicklung der Relativitätstheorie. Dadurch, daß wir in den voraufgegangenen Kapiteln den Gegenstand der Mathematik in sich und in seinen Unterschieden von den Gegenständen der anderen Wissenschaften, im besonderen der Naturwissenschaft, kennen gelernt haben, sind uns die Mittel in die Hand gegeben, um ein Problem vom allgemeinen Standpunkte aus zu lösen, das durch die Relativitätstheorie entstanden ist und das die Mathematik mit berührt. Ein kurzer Blick auf die Entwicklung der Relativitätstheorie mag uns bis an das Problem führen.

Auch die klassische Mechanik kannte ein Relativitätsprinzip, das sie dahin formuliert, daß die *mechanischen* Naturgesetze gegenüber der Galilei-Transformation invariant sind. Die Analysen der optischen Versuche von Michelson und Morley und der elektrischen von Trouton und Noble führten zu einer Erweiterung dieses phoronomischen Relativitätsprinzips. Sie regten zunächst den Gedanken an, daß *alle* Naturgesetze unabhängig davon sind, auf welches von zwei relativ zueinander in geradlinig-gleichförmiger Bewegung befindlichen Koordinatensystemen die Naturerscheinungen bezogen werden. Nimmt man dazu die nach Einstein durch die Michelson-Morleyschen Versuche nahegelegte Forderung, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen dieselbe Konstante sei, so hat man den Inhalt der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie, der sich exakt so aussprechen läßt: Alle allgemeinen Naturgesetze sind invariant gegenüber der Lorentz-Transformation. Aus dieser Theorie fließt die Relativität aller Raum- und Zeitmessungen; jede gemessene Raum- oder Zeitlänge ist von dem Bewegungszustand des Bezugssystems abhängig. In dieser Theo[rie] steckt aber schon der Keim zur Weiterentwicklung. Warum so[ll]

denn die geradlinig-gleichförmig bewegten Systeme vor den beschleunigt bewegten bevorzugt sein? In dieser Einschränkung liegt etwas Unbefriedigendes. Der Relativitätsgedanke selber drängt zur Verallgemeinerung.

Den Boden, auf dem diese Verallgemeinerung möglich war, schuf das experimentelle Ergebnis, daß träge und schwere Masse gleich sind, d. h. durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden. Indem Einstein auf Grund dieser Erfahrung das Äquivalenzprinzip aufstellte, wonach man die beobachtete Beschleunigung eines sich selbst überlassenen Körpers beliebig als Trägheitswirkung oder als Gravitationswirkung deuten kann, kam er zur allgemeinen Relativitätstheorie, nach der die allgemeinen Naturgesetze gegenüber jeder beliebigen Transformation invariant sind. Diese Theorie zwingt uns, von der euklidischen Maßbestimmung abzugehen. Nach ihr besitzt jeder Ort des Raumes im allgemeinen ein anderes Krümmungsmaß, das von dem Gravitationspotential an dem Orte abhängig ist, ohne daß der Raum als Ganzes dadurch eines einheitlichen Krümmungsmaßes zu entbehren braucht.

46. Physik als Geometrie. Danach sind also Raum, Zeit und Materie zu einer unauflöslichen Einheit verbunden. Insbesondere sind Raum und Materie untrennbar verknüpft. Von einer Struktur des Raumes kann man ohne Berücksichtigung der Materie nicht reden. Die Materie gibt gleichsam dem Raume seine Struktur. Die Maßverhältnisse des Raumes beschreiben heißt gleichzeitig die Materie beschreiben. Hier stehen wir vor dem Problem, das die allgemeine Relativitätstheorie uns vorlegt. Wird jetzt nicht jeder, der die Struktur des Raumes mathematisch darstellt, damit gleichzeitig auch die Materie erfaßt haben? Ohne Zweifel *muß* jeder, der den Raum der Naturwissenschaft mit dem geometrischen Raum gleichsetzt (35), vom Standpunkte der Relativitätstheorie aus wegen jener Einheit Raum-Zeit-Materie die Physik mit der Geometrie identifizieren. Dieser Zusammenhang scheint sogar in den meisten Fällen vorzuliegen. So bei Hilbert, wenn er sagt[1]), daß durch seine Grundgleichungen „allgemein eine Zurückführung aller physikalischen Konstanten auf mathematische Konstanten möglich sein muß — wie denn überhaupt damit die Möglichkeit naherückt, daß aus der Physik im Prinzip

---

F. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1915, S. 407.

eine Wissenschaft von der Art der Geometrie werde". So bei Weyl[1]). Trotzdem es S. 83 so aussieht, als ob er den geometrischen Raum scharf von dem „wirklichen" Raume scheide, scheinen sie ihm später (S. 174, 227) wieder zusammenzufließen, wo er z. B. behauptet, daß die Geometrie heute von der Physik aufgesogen wird. Wenn man bedenkt, daß es einen anderen sachlichen Grund für die Gleichsetzung von Physik und Geometrie neben der Auffassung der Geometrie als der Lehre von „dem" Raum nicht gibt und eigentlich nicht geben kann, so darf man mit großer Wahrscheinlichkeit vermuten, daß dieser Grund auch in solchen Fällen dahintersteckt, wo, wie in der gleich zu besprechenden Darstellung von Haas, der Gedanke äußerlich anders grundgelegt erscheint, und daß nur ein sekundäres Motiv in dem eigentümlichen Reiz dieser Auffassung liegt, der vor allem von solchen empfunden wird, die imstande sind zu sehen, mit welcher Kraft die Mathematik innerhalb der Relativitätstheorie die Physik beherrscht.

A. Haas hat für diese Identifizierung einen exakten Ausdruck gegeben. Schon Riemann hatte gefunden, daß die Maßverhältnisse in einer Mannigfaltigkeit von beliebiger Dimension durch eine (zehnkomponentige) Tensorgröße bestimmt sind, die man metrischen Fundamentaltensor nennt. Das genügt aber nicht, damit in ihr eine Geometrie möglich sei. Dazu muß auch für jede Stelle eine (vierkomponentige) Vektorgröße gegeben sein, die wir mit Haas den Maßstabvektor nennen wollen. Andererseits führt die allgemeine Relativitätstheorie alle physikalischen Erscheinungen auf die Existenz zweier räumlich und zeitlich zusammenfallender Felder zurück, eines elektromagnetischen Feldes und eines Gravitationsfeldes. Das elektromagnetische Feld ist vollständig durch das elektromagnetische Viererpotential bestimmt, das Gravitationsfeld vollständig durch die zehnkomponentige Tensorgröße des Gravitationspotentials. Es ist nun nach Haas ein naheliegender Gedanke, den physikalischen Begriff des Gravitationspotentials mit dem mathematischen Begriff des metrischen Fundamentaltensors und den physikalischen Begriff des elektromagnetischen Potentials mit dem mathematischen des Maßstabvektors zu identifizieren. Auf diese Weise kommen Physik und

[1]) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 1918.

Mathematik in einen unlösbar engen Zusammenhang. Die Physik ist Geometrie. Beide Wissenschaften unterscheiden sich jetzt wie zwei verschiedene Sprachen, deren man sich zur Schilderung eines und desselben Gegenstandes bedient. Die Naturgesetze werden zu geometrischen Notwendigkeiten.

47. Die empirische Grundlage der Relativitätstheorie. Diese Auffassung ist bestechend. Aber sie steht zunächst im Widerspruch mit der Relativitätstheorie, deren Entwicklung deutlich die auch von Einstein selbst und von anderen immer betonte empirische Grundlage der Theorie aufweisen kann. Die allgemeine Relativitätstheorie ist nur möglich auf Grund der Identität von träger und schwerer Masse (45). Diese Identität ist eine *notwendige* Konsequenz aus der Theorie. Wäre sie nicht vorhanden, dann wäre die Theorie falsch. Daß sie aber vorhanden ist, ist eine *Tatsache der Erfahrung*, die sich niemals aus geometrischen Überlegungen deduzieren läßt.

Man kann des weiteren darauf hinweisen, daß der Wert, den das elektromagnetische Potential und das Gravitationspotential in einem gegebenen Punkte der Wirklichkeit haben, nicht geometrisch abgeleitet, sondern nur erfahrungsgemäß bestimmt werden kann. Daraus ersieht man, daß in jener Identifikation der mathematischen und physikalischen Tensor- bzw. Vektorgröße, die Haas vornimmt, doch etwas Richtiges liegt. Es ist das die Erkenntnis, daß in den Komponenten dieser Größen Physik und Mathematik sich berühren. Wenn man eine Mannigfaltigkeit zur Beschreibung der naturwirklichen Verhältnisse benutzt, so sind die Werte, die jene Komponenten dann annehmen, ausschließlich empirisch gegeben.

48. Die gegenstandstheoretische Scheidung von Physik und Geometrie. Dieser Nachweis, daß die Physik *tatsächlich* keine Geometrie ist, genügt dem Physiker. Der Logiker aber möchte tieferen Aufschluß haben, und der liegt in unseren bisherigen Untersuchungen, die lehren, daß jene Gleichsetzung unmöglich ist.

Zuvor sei betont, daß es für unsere Zwecke gleichgültig ist, ob die Aufstellungen der Relativitätstheorie in allen Punkten richtig sind oder nicht. Gegen die Folgerungen, die aus der engen Verknüpfung von Raum uud Materie über den Charakter der Physik gezogen wurden, wenden sich unsere Überlegungen. Aber auch

nur dagegen. Sie lassen alle anderen Gedanken der Relativitätstheorie unberührt, ohne ihnen damit beizupflichten.

Wenn nun die Physik Geometrie ist, wenn die physikalischen Gesetze geometrische Notwendigkeiten sind, wie müssen dann die Gegenstände beschaffen sein, mit denen die Physik sich beschäftigt? Offenbar so, wie alle Gegenstände der Geometrie sind: sie müssen ideale, zeitlos seiende Gegenstände sein. Wir wissen, daß nur von solchen Gegenständen, wenn sie im quantitativen Bereiche stehen, Geometrie im üblichen Sinne möglich ist.

Wie sind aber die Gegenstände beschaffen, die die Physik in Wirklichkeit untersucht und mit denen sie sich ihrem Begriff nach befaßt? Gegenstand der Physik ist und kann nur sein ein Ausschnitt aus der sinnlichen, zeitlich seienden Wirklichkeit. Gewiß kann sich eine physikalische Theorie sehr weit von dieser Wirklichkeit entfernen; aber sie ist aufgestellt einzig und allein um dieser Wirklichkeit willen. Von sinnlichen Gegenständen geht jede physikalische Arbeit aus und zu ihnen kehrt jede physikalische Arbeit zurück. Auch die Relativitätstheorie. Mag sie auf ihrem höchsten Gipfel auch noch so eindringlich behaupten, daß Raum und Zeit den letzten Schatten physikalischer Gegenständlichkeit verloren hätten, sie ist doch letzten Endes nur gebaut, um die *in Raum und Zeit* bestehenden Dinge zu verstehen. Sinnliche Gegenstände sind der Anfang und das Ende aller Physik. Die Physik ist ihrem Begriffe nach Erfahrungswissenschaft.

Physik und Geometrie haben also Gegenstände, die völlig voneinander verschieden sind, so völlig verschieden, daß dadurch gerade das Problem entsteht (41): Wie ist es möglich, geometrische Gegenstände physikalischen Gegenständen zuzuordnen? Es ist deshalb auch gegenstandstheoretisch unmöglich, daß die Physik Geometrie sein kann, wenn man nicht mit diesen beiden Worten etwas ganz anderes bezeichnen will, als was die Wissenschaften der Physik und Geometrie ihrem Begriffe gemäß sind.

Woran liegt es nun eigentlich, daß man die totale Verschiedenheit der physikalischen und geometrischen Gegenstände so vollständig übersehen konnte? Der tiefste Grund ist derselbe wie bei der beklagenswerten Grenzverwischung zwischen Mathematik und Logik, die wir früher behandelt haben. Man ist in den Einzelwissenschaften viel zu wenig gewohnt, sich über ihre logis
Struktur Rechenschaft zu geben, und läßt sich infolgedessen dur

scheinbar naheliegende Gedanken zu Behauptungen bewegen, die eine kurze Beschäftigung mit der Wissenschaftstheorie als Irrtümer aufzeigen würde.

49. Die Geometrie als Physik. Die gegenseitige Abhängigkeit von Raum und Materie ist ein Motiv von gleicher Reizkraft und gleicher Berechtigung auch für den umgekehrten Gedanken, die Geometrie zur Physik zu machen. Es wundert einen fast, daß dieser Gedanke im Anschluß daran so selten aufgetaucht ist. Man könnte ihn in den folgenden Ausführungen von Max Born finden [1]).

Nach Born ist Physik die Lehre von den Beziehungen raumzeitlicher Koinzidenzen, d. h. der Schnitt- oder Berührungspunkte materieller Weltlinien der Minkowskiwelt. „Die logische Verarbeitung dieser Beziehungen ist die mathematische Theorie; mag sie noch so verwickelt sein, ihr letzter Zweck ist immer, die tatsächlich beobachteten Koinzidenzen als denknotwendige Folgen einiger Grundbegriffe und Grundsätze darzustellen. Manche Aussagen über Koinzidenzen treten in der Form geometrischer Sätze auf; die Geometrie als eine auf die wirkliche Welt anwendbare Lehre hat dabei keine Sonderstellung vor anderen Zweigen der physikalischen Wissenschaften. Ihre Begriffsbildungen sind in derselben Weise durch das tatsächliche Verhalten der natürlichen Gegenstände bedingt, wie die Begriffe anderer physikalischer Gebiete. Irgend eine Vorzugsstellung können wir der Geometrie nicht zuerkennen... Der Behauptung von der absolut exakten Gültigkeit der Geometrie können wir vom physikalischen Standpunkt aus keinen faßbaren Sinn unterlegen. Die Gegenstände der tatsächlich auf die Welt der Dinge angewandten Geometrie sind also diese Dinge selbst, von einem bestimmten Gesichtspunkt aus betrachtet."

Wenn aber auch diese nicht eben klaren Worte Borns anders aufgefaßt werden müßten, so ist doch verständlich, daß an sich die Geometrie als Erfahrungswissenschaft genau so eng an jenes Ergebnis der Relativitätstheorie gebunden ist wie die Physik als geometrische Notwendigkeit. Auf dem Standpunkt der Relativitätstheorie folgt nämlich aus der Identifizierung von physischem und mathematischem Raum nichts weiter als die Wesenseinheit von Physik und Geometrie. Diese Einheit kann nun aber auch so gedeutet werden, als ob die Geometrie zur Physik, also zu einer

---

[1]) M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, 1920, S. 219 ff.

Erfahrungswissenschaft würde. Während man früher glaubte, die Eigenschaften „des“ Raumes aus Axiomen ableiten zu können, zeigt ja heute die Relativitätstheorie, daß diese Eigenschaften von der Materie bestimmt, also empirisch auffindbar sind. Wir haben demnach keinen Anlaß, eine der beiden Wissenschaften zu bevorzugen. Wer die Geometrie als die Wissenschaft von „dem Raum“ und „den räumlichen“ Dingen ansieht, der hat die *Wahl*: er kann die Geometrie empirisch oder die Physik geometrisch machen. Es gibt keinen Grund, der ihn hindern könnte, *jedes von beiden* zu tun.

Wir haben hier den merkwürdigen Fall, daß zwei logische Folgerungen *gleichberechtigt* und doch völlig einander *widersprechend* sind. Darin liegt der deutliche Hinweis, daß *beide* unrichtig sind.

Um diesem Schluß zu entgehen, könnte man sagen, daß Physik und Geometrie zu einer neuen, dritten Wissenschaft verschmelzen. Aber diese neue Wissenschaft müßte dann von jeder der beiden Komponenten etwas besitzen; es müßte also jede dieser Komponenten etwas aufgeben. Was geben sie denn nun auf? Da sie nur aufgeben könnten, worin sie verschieden sind, so kommen wir wieder auf den alten Standpunkt: gibt die Geometrie die Notwendigkeit preis, so wird sie empirisch; gibt die Physik den empirischen Charakter preis, so wird sie geometrisch. Eine Wissenschaft, die gleichzeitig notwendig und empirisch wäre, ist unmöglich. Der Ausweg ist also keiner.

Nun ist ja schon vor der Relativitätstheorie, z. B. von M. Pasch[1]), versucht worden, die Geometrie als Naturwissenschaft durchzuführen. Aber dabei gleitet sie entweder unmerklich in die übliche Geometrie über oder sie bleibt die primitive Geometrie des praktischen Lebens.

Der Grund wird ersichtlich, wenn man die Frage der Möglichkeit einer Auflösung der Geometrie in Physik genau so untersucht, wie es mit der umgekehrten Frage geschehen ist: durch unvoreingenommene Betrachtung der Gegenstände, mit denen Geometrie und Physik sich tatsächlich befassen. Die Untersuchung ist eben in dieser Schrift angestellt und hat gezeigt, wie diese Gegenstände in so völlig verschiedenen Bereichen liegen, daß eine Zurückführung der von ihnen her bestimmten Wissenschaften aufeinander unmöglich ist.

---

[1]) M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882.

VIII. Die Induktion in der Mathematik

50. Die Inhalt-Umfang-Relation. Während die bisher besprochenen falschen Auffassungen den Gegenstand der Mathematik in den logischen Bereich stellen wollen, versucht eine andere Ansicht, zwar nicht bewußt, aber tatsächlich, ihn dem Erfahrungsgebiet der sinnlichen Gegenstände zuzuteilen, indem sie im Bereiche der Mathematik die Induktion wiederfinden will. Wir wollen uns deshalb noch überzeugen, daß die Induktion in diesem Bereiche keine Geltung hat.

Zu dem Zwecke definieren wir zuerst, was unter Induktion zu verstehen ist. Wir ziehen einen Induktionsschluß, wenn wir aus der *Konstanz* von Verknüpfungen unter gewissen Bedingungen auf die *Notwendigkeit* dieser Verknüpfungen schließen. Welches diese Bedingungen sind, ist uns hier gleichgültig. Es könnte nun scheinen, als ob dieser Schluß auch auf mathematischem Gebiete nicht zu umgehen sei. Warum dürfen wir z. B. nicht aus der Konstanz der Verknüpfung, daß jede gerade Zahl, die wir kennen, sich als Summe zweier Primzahlen darstellen läßt, auf die Notwendigkeit schließen? Aber es ist ein instinktives Gefühl, das die Mathematiker von diesem Schlusse zurückhält. Vielleicht ist es das Innewerden des Umstandes, daß ein Induktionsschluß nur Wahrscheinlichkeit, keine Sicherheit gewähren kann, während die Mathematik Sicherheit verlangt. Vielleicht ist es auch das Gefühl, daß die Induktion in dieses Gebiet nicht hinein paßt, daß dieser Fall und andere Fälle der Mathematik doch total verschieden sind von den Fällen, wo die Induktion angewandt wird.

Dieses Gefühl hat die Mathematiker nicht getäuscht. Es läßt sich zeigen, daß der Induktionsschluß wenigstens *eine* Bedingung hat, die im Gebiete der mathematischen Gegenstände nicht erfüllt ist.

Um das darzulegen, gehen wir von den Begriffen des Inhaltes (I) und des Umfanges (U) aus, die wir von früher (30) her kennen.

Wir müssen dabei nach den einzelnen Gebieten der Wirklichkeit scheiden und betrachten zuerst die *sinnliche Wirklichkeit.*

Hier ist jeder einzelne Gegenstand ein Umfang, zu dem ein anderer und unübersehbarer Inhalt gehört. Darin liegt schon ausgedrückt, daß auch bei Klassenbildung zu jedem Umfang nur ein

einziger Inhalt gehört. Denken wir daran, daß der Umfang die Menge *aller* Subjekte (Werte) ist, die die Satzfunktion erfüllen, so ergibt sich auch, daß zu jedem Inhalt nur ein einziger Umfang gehört. Der Inhalt ist das, was den Gegenstand zu diesem bestimmten macht; er bestimmt im besonderen auch den Umfang des Gegenstandes.

Alle Prädikate, die einen Inhalt konstituieren, nennen wir die Teile dieses Inhaltes; es kann also ein Prädikat gleichzeitig Inhalt und Inhaltsteil sein. Inhaltsteile können auseinander ableitbar sein oder nicht, sie können in notwendiger Verknüpfung stehen oder nicht. Je nachdem heißen sie gleichartige oder ungleichartige (echte) Teile. Temperatur und Größe sind gleichartige, Größe und spezifisches Gewicht echte Teile.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie bei der Bildung mehrgliedriger Klassen von einzelnen Gegenständen derselben Art der Inhalt vom Umfang abhängig ist.

Da müssen wir uns zuerst darüber klar sein, was der Inhalt bei solchen Klassen bedeutet. Es sind an sich zwei Wege möglich, um den Inhalt der Klassen zu finden. Entweder vereinigt der Inhalt in sich *alle* Prädikate der Elemente oder nur die den Elementen *gemeinsamen.* Der erste Weg ist hier wegen der Unübersehbarkeit des Inhaltes unmöglich. Der zweite Weg ist möglich und ergibt ein richtiges Resultat, weil die den Elementen gemeinsamen Prädikate ja *alle* Prädikate sind, die von der Klasse als einem einzigen Gegenstande gelten. Einen Mittelweg gibt es nicht. Denn würde man zu den gemeinsamen noch andere Prädikate hinzunehmen, dann würden die gemeinsamen allen Elementen, die anderen nur einigen zukommen und man könnte nicht sagen, welchen Gegenstand der Inhalt eigentlich bestimmte[1]).

Ich nehme nun einen einzelnen Gegenstand $I_1 U_1$. Füge ich zu ihm einen zweiten Gegenstand $I_2 U_2$ hinzu, so daß der Umfang der so entstandenen Klasse $U_1 + U_2$ ist, so kann, ganz allgemein gesprochen, mit I_1 dreierlei geschehen, wenn wir die *Anzahl* der

---

[1]) Ich mache darauf aufmerksam, daß das, was wir Inhalt der Klasse nennen, nicht der logische Begriff ist, sondern diesen Begriff als Unterfall umfaßt. Man kann als Klasse beliebige (was oben außer Betracht gelassen ist) und beliebig viele Gegenstände zusammenfassen. Der logische Begriff geht aber auf *vollständige* Klassen (und *wesentli*[illegible] Merkmale).

Prädikate ins Auge fassen: I_1 kann wachsen, konstant bleiben oder abnehmen.

Kann I_1 wachsen? Zweifellos nicht. Denn wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Klasse die gemeinsamen Prädikate umfaßt, könnte er selbst für den Fall $I_2 > I_1$ höchstens gleich I_1 sein.

Kann I_1 konstant bleiben? Aber auch das ist ausgeschlossen, und zwar durch die Andersartigkeit der Inhalte, die besagt, daß jeder Gegenstand auch Inhaltsteile hat, die anderen nicht zukommen. Hier ist besonders darauf zu achten, daß die Andersartigkeit auf der Unübersehbarkeit beruht. Was wir als gemeinsame Inhaltsteile beobachten, ist immer nur der allerkleinste Teil des ganzen Inhaltes. Deshalb sieht es *für uns* manchmal so aus, als ob der Inhalt konstant bliebe. Möglich ist natürlich die Konstanz, aber wegen der auf der Unübersehbarkeit beruhenden Andersartigkeit aufs höchste unwahrscheinlich.

Es folgt also, daß I_1 abnehmen muß.

Fassen wir die Klasse ($I_1 U_1$, $I_2 U_2$) wieder als *einen* Gegenstand, so können wir zu ihm einen weiteren Gegenstand $I_3 U_3$ hinzufügen und erhalten dasselbe Resultat. Das Ergebnis gilt also allgemein. Machen wir den umgekehrten Prozeß, so nimmt der Inhalt offensichtlich zu. Wir haben demnach die Beziehung, die wir Inhalt-Umfang-Relation (I-U-R) nennen wollen:

Mit wachsendem Umfang nimmt der Inhalt ab, und umgekehrt.

Die I-U-R gilt selbstverständlich für den Übergang von vollständigen Klassen zu über- oder untergeordneten Klassen. Sie gilt aber auch gemäß unserer Ableitung bei Zusammenfassung beliebig vieler Glieder innerhalb einer vollständigen Klasse, z. B. für den Übergang von der Klasse „vier bestimmte Hunde-Individuen" zu fünf oder drei von solchen. Wir wollen die letztere Art der Klassenbildung *immanente Klassenbildung* nennen; uns interessiert jetzt nur diese Art.

Die I-U-R läßt sich noch etwas spezialisieren. In der sinnlichen Wirklichkeit herrscht bekanntlich eine Gesetzlichkeit, zufolge derer viele Inhaltsteile und Komplexe von solchen miteinander verknüpft, also keine echten Teile sind. Diese Naturgesetzlichkeit arbeitet der Heterogeneität und ihrem Auswirken in der I-U-R entgegen. Durch sie überlagert sich der Andersartigkeit eine gew... Gleichartigkeit. Sie hebt die totale Heterogeneität auf, die d... bestehen würde, daß sich überhaupt keine zwei Gegenstände

mit gemeinsamen Inhaltsteilen fänden. Sie ist es also, die das Homogeneisieren (29) möglich macht. Sie ist nun auch durch ihre Erzeugung von Gleichmäßigkeiten der Anlaß, daß die *echten* Teile in erster Linie von der Inhaltsabnahme zufolge der I-U-R betroffen werden.

Was die Gesetzlichkeit mit den unechten Teilen naturnotwendig tut, kann ich freiwillig mit echten Teilen oder solchen, die ich für echte ansehe, vollbringen, nämlich bei der Klassenbildung einen echten Teil so festhalten, daß er von der Inhaltsabnahme nicht betroffen wird. Wenn ich z. B. Rehböcke mit schwarzem Gehörn untersuche, dann ist der Inhaltsteil „schwarzes Gehörn" festgehalten, indem ich mir unter den Rehböcken nur solche mit schwarzem Gehörn aussuche. Oder wenn ich eine elastische Kugel mehrere Male wider eine feste Wand unter dem Winkel von 30° stoßen lasse, dann habe ich von den Gegenständen „Stoß der elastischen Kugel wider die feste Wand" diejenigen mit dem festgehaltenen Inhaltsteil „unter dem Winkel von 30°" wirklich erzeugt. Der festgehaltene Teil gibt mir also den Gesichtspunkt, unter dem ich aus einer Klasse Individuen auswähle.

51. Die Induktion im sinnlichen Gegenstandsgebiet. Nach diesen Vorbereitungen ist es unschwer einzusehen, daß die I-U-R bei immanenter Klassenbildung eine Bedingung der Induktion in der sinnlichen Wirklichkeit ist.

Ich zeige zuerst an einem Beispiele, wie sie Induktion ermöglicht. Ich will untersuchen, wie sich beim zentralen Stoß einer elastischen Kugel auf eine ruhende elastische Kugel von gleicher Masse die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoße verhalten, und erzeuge diesen Vorgang (Gegenstand) beliebig oft mit dem festgehaltenen Inhaltsteil „Geschwindigkeit der stoßenden Kugel 50 cm/sec." Dann wird jeder dieser Gegenstände außer dem festgehaltenen Inhaltsteil noch einen weiteren Komplex konstant zeigen, nämlich die Vertauschung der Bewegungen in Hinsicht auf Richtung und Geschwindigkeit nach dem Stoße. Es treten also konstante Verknüpfungen von Inhaltsteilen auf. Nach der I-U-R müssen bei immanenter Klassenbildung, wie sie ja hier vorliegt, in erster Linie die echten Teile abnehmen mit Ausnahme des festgehaltenen Inhaltsteiles. Wenn nun bei beliebiger Wieder-holung desselben Gegenstandes außer dem festgehaltenen noch ei

anderer Teil konstant bleibt, dann müssen wir schließen, daß diese Konstanz nicht zufällig ist, daß dieser Teil vielmehr kein echter Teil, sondern mit dem festgehaltenen notwendig verknüpft ist. Wir schließen auf Grund der I-U-R von der Konstanz einer Verknüpfung auf die Notwendigkeit. Die Bedingungen dieses Schlusses lassen sich jetzt leicht ausdrücken. Es sind diese: 1. Die Klasse muß hinreichend großen Umfang haben. 2. Es soll nur *ein* und zwar ein möglichst einfacher Inhaltsteil mit möglichster Genauigkeit festgehalten werden. Entsprechendes wie vorhin ergibt sich, wenn ich eine andere Geschwindigkeit festhalte.

Ändert man die Gegenstände, indem man den Kugeln verschiedene Massen gibt und die eine nicht mehr ruhen läßt, und hält man dabei dem Versuchszweck entsprechende Inhaltsteile fest, so bekommt man sämtliche Beziehungen, in denen Massen und Geschwindigkeiten beim zentralen Stoß elastischer Kugeln stehen. Das Vorstehende ist offenbar der Typus jeder Induktion, mag sie noch so kompliziert sein. *Jede Induktion enthält ein System von immanenten Klassenbildungen mit festgehaltenen Inhaltsteilen.*

Die wichtigste Frage ist nun, ob die I-U-R bei immanenter Klassenbildung eine *notwendige* Bedingung der Induktion ist. Wir erhalten Antwort darauf, wenn wir einmal annehmen, diese I-U-R gelte nicht. Dann müßten notwendig neben den festgehaltenen auch noch andere Inhaltsteile konstant bleiben, ohne daß diese Teile verknüpft seien, dann müßten also neben notwendigen Konstanzen zufällige auftreten, und wir hätten kein Mittel, um sie voneinander zu unterscheiden. Unter diesen Umständen wäre Induktion unmöglich. Die I-U-R ist also eine notwendige Bedingung der Induktion. Ob sie auch die einzige notwendige, d. h. die hinreichende Bedingung ist oder welche Bedingungen sonst noch als notwendige in Betracht kommen, sind Fragen, um die wir uns nicht zu kümmern brauchen.

52. Die Induktion im mathematischen Gegenstandsgebiet. Gilt nun dieser ganze Zusammenhang auch für das Wirklichkeitsgebiet der *mathematischen Gegenstände?*

Zunächst erinnern wir uns noch einmal, daß die I-U-R einen Inhalt voraussetzt, der zwei Bedingungen erfüllt: er muß sein 1. gemeinsam, 2. variabel mit dem Umfang der Klasse. Unter diesen Bedingungen ist ein spezifischer Inhalt immanenter Klassen,

d. h. ein solcher, der dieser und nur dieser Klasse zukommt, zwar in der sinnlichen Wirklichkeit vorhanden, aber für die Geltung der I-U-R nicht erforderlich.

Wir trennen nun hier im mathematischen Gebiete für die immanente Klassenbildung die beiden Fälle der Gegenstände mit absolut gleichem Inhalt und der Gegenstände mit verschiedenem Inhalt.

Fasse ich zwei absolut gleiche mathematische Gegenstände zu einer Klasse zusammen, so ist der *ganze* Inhalt jedes Gegenstandes der gemeinsame Inhalt; er bleibt aber bei Umfangsänderung konstant. Die I-U-R gilt also nicht. Alle solche Klassen sind ausschließlich durch ihren Umfang verschieden.

Fasse ich zwei verschiedene mathematische Gegenstände, z. B. zwei ebene Dreiecke oder die Zahlen 1 und 2, in eine Klasse zusammen, so ist es für die I-U-R gleichgültig, daß jede dieser Klassen beliebig oft existiert; gäbe es die I-U-R bei *einer* Klasse, so gäbe es sie bei allen ihr gleichen. Aber sie gilt hier überhaupt nicht, wenn es auch einen Augenblick so aussieht. Der Inhalt jedes mathematischen Gegenstandes setzt sich nämlich zusammen aus seinem Klasseninhalt, der ihn zum Element dieser bestimmten vollständigen Klasse macht, und aus seinem nur ihm eigenen spezifischen Inhalt. Dieser letztere ist es natürlich, der bei immanenter Klassenbildung allein abnehmen kann. Nehme ich zu einem Dreieck ein zweites, so schrumpft der Inhalt dieser immanenten Klasse gegenüber dem Inhalt des ersten Gegenstandes im allgemeinen zu dem allen Dreiecken gemeinsamen Klasseninhalt zusammen; der spezifische Inhalt des ersten Dreiecks ist vollständig verschwunden. Es ist also bei der Umfangszunahme eine Inhaltsabnahme eingetreten. Aber bei weiterer Umfangszunahme bleibt der Inhalt konstant. Es könnte durch Zufall einmal sein, daß er mit dem ersten Schritt noch nicht konstant geworden wäre. Hat z. B. das erste Dreieck die Seiten 2, 4, 5 cm, das zweite die Seiten 3, 4, 6 cm, so bleibt nach der ersten immanenten Klassenbildung außer dem allen Dreiecken gemeinsamen Inhalt noch der den beiden Dreiecken gemeinsame Inhalt „eine Seite von 4 cm“, der erst beim zweiten Schritt verschwindet, wenn man ihn nicht festhält. Mit solchen Inhaltsänderungen, die immer beim ersten Schritt und nur durch Zufall bei einigen weiteren Schritten [illegible]r immanenten Klassenbildung auftreten, kann man natürlich n[illegible]t

rechnen. Die I-U-R verlangt einen bei jeder Umfangszunahme abnehmenden Inhalt; der liegt aber hier nicht vor.

Im Bereiche der mathematischen Gegenstände gilt also die I-U-R bei immanenter Klassenbildung nicht [1]. Tatsächlich treten auch hier die Zustände auf, die wir vorhin (51) für den Fall des Nichtgeltens der I-U-R charakterisiert haben. Es finden sich Konstanzen, die zufällig sind. Daß $x^2 + x + 41$ eine Primzahl ist, ist eine für viele Fälle zufällig auftretende konstante Verknüpfung; sie gilt aber nicht notwendig, denn für $x = 40$ ist sie z. B. falsch. Dann gibt es Fälle, wo wir nicht sagen können, ob eine Konstanz zufällig oder notwendig ist, z. B. bei dem Satze, daß jede gerade Zahl sich als Summe zweier Primzahlen darstellen läßt.

Weil nun die I-U-R bei immanenter Klassenbildung eine notwendige Bedingung der Induktion ist, *gibt es im mathematischen Gegenstandsgebiete keine Induktion.*

Wir fragen schließlich noch, worauf diese Zusammenhänge letzten Grundes zurückgehen.

Im Gebiete der sinnlichen Wirklichkeit ist es offensichtlich die Andersartigkeit und Unübersehbarkeit der Inhalte, die es möglich und notwendig macht, daß gemeinsame und variable Inhalte bei immanenter Klassenbildung zustande kommen. *Die Möglichkeit der Induktion im sinnlichen Gegenstandsgebiet beruht also auf der spezifischen Heterogeneität des Gebietes.*

---

[1] Sie gilt übrigens hier auch nicht, wie schon mehrmals von Logikern bemerkt worden ist, beim Übergang von vollständigen Klassen zu über- oder untergeordneten Klassen, wenn die Klassenbegriffe Aussagen über Relationen zwischen homogen-quantitativen Gegenständen enthalten. Denn dann bildet die Mathematik den Klassenbegriff nach dem ersten der oben (50) genannten Wege nicht als die Menge der gemeinsamen Prädikate, sondern als die Menge aller Prädikate, mengentheoretisch und vergleichsweise gesprochen nicht als den gemeinsamen Durchschnitt, sondern als die Vereinigungsmenge. Das ist möglich, weil der Inhalt jedes mathematischen Gegenstandes vollständig bestimmt ist. Das ist aber auch notwendig, weil die dabei benutzten Zeichen *a, b, c* usw keine Klassenbegriffe, sondern Symbole sind, die jede Zahl in ihrer ganzen Bestimmtheit vertreten. „Das Pferd", „der Hund" usw sind keine sinnlichen Gegenstände, sondern Begriffe. Aber *a, b, c* usw werden als mathematische Gegenstände angesehen; denn man kann 1 zu *a* addieren, aber nicht „Karo" zu „der Hund" hinzuzählen.

Bei den mathematischen Gegenständen sind wir im homogen-quantitativen Medium. Hier ist die Andersartigkeit zum Teil, die Unübersehbarkeit ganz geschwunden. Gleichheit und Verschiedenheit sind hier *ausschließlich homogen-quantitativer* Art. Die Homogeneität schließt bei absolut gleichen Gegenständen die I-U-R und damit die Induktion aus. Sehen wir davon ab, so ist die Gleichheit von Inhaltsteilen, also die Gemeinsamkeit bei immanenter Klassenbildung durch den ausschließlich homogen-quantitativen Charakter der Gleichheit auf ein so geringes Maß beschränkt, daß, wie wir hörten, im allgemeinen schon nach dem ersten Schritt Konstanz des Inhaltes eintritt. Nun setzt aber die Induktion die I-U-R mit festgehaltenem Inhaltsteil voraus. Das ist überhaupt nur dort möglich, wo die Konstanz an sich nicht nach dem ersten Schritt einträte. Halte ich nun in solchen Fällen einen Inhaltsteil fest, z. B. bei den vorhin genannten Dreiecken die Seite von 4 cm, so schwinden nach dem ersten Schritt alle etwa sonst noch vorhandenen echten spezifischen Inhaltsteile und es kann auch eben wegen des Festhaltens keine weitere Abnahme des spezifischen Inhaltes mehr erfolgen; der festgehaltene Teil ist jetzt der einzige spezifische Teil. Es ergibt sich also, daß das Festhalten eines Inhaltsteiles bei immanenter Klassenbildung von mathematischen Gegenständen dort, wo es überhaupt möglich ist, nicht nur im allgemeinen, sondern *immer* nach dem ersten Schritt schon die Konstanz des Inhaltes mit sich bringt. Die Anwendung der Induktion ist also auch deshalb schon bei zufälligen Inhaltsabnahmen ausgeschlossen. Und damit *beruht die Unmöglichkeit der Induktion im mathematischen Gegenstandsgebiet vollständig auf der Homogeneität dieses Gebietes.* Das quantitative Moment allein würde sie nicht garantieren; denn die sinnlichen Gegenstände sind auch in quantitativen Medien.

Indem die Homogeneität die Induktion ausschließt, begründet sie gleichzeitig die Möglichkeit der Anwendung der absolut sicheren Deduktion (43).

53. Die vollständige Induktion. Oft wird wenigstens der Grenzfall der vollständigen Induktion für das mathematische Gebiet angenommen. Habe ich in einer Bibliothek alle Bücher untersucht und formuliere nun das Urteil: Alle Bücher dieser Bibliotl sind deutsch —, so nennt man das in der Sprache der herkön

lichen Logik eine vollständige Induktion. Diese Induktion liegt also vor, wenn man zusammenfassend von allen in der Erfahrung gegebenen Subjekten dasselbe Prädikat oder von denselben Subjekten alle in der Erfahrung gegebenen Prädikate aussagt.

Nicht viele Logiker haben sich hier von der Tradition freimachen können. In Wirklichkeit haben wir nämlich im Falle der sogenannten vollständigen Induktion überhaupt keinen *Schluß*, also auch keine Induktion, sondern nur einen kurzen Ausdruck für viele Einzelurteile, wir haben — so wollen wir es nennen — ein kollektives oder universales Urteil.

Dennoch ist diese Form bedeutsam, vor allem deshalb, weil sie die *Vorstufe der eigentlichen Induktion* sein kann. Denn im Grunde sagt das universale Urteil ja die *Konstanz* einer Verknüpfung aus; schließt man nun von dieser *Konstanz* auf die *Notwendigkeit*, so hat man die eigentliche Induktion. Behaupte ich auf Grund der Erfahrung, daß alle Bewohner eines Dorfes arm sind, dann läßt dieses universale Urteil es offen, ob diese Verknüpfung zufällig oder notwendig ist. Mit mehr oder weniger großer Wahrscheinlichkeit kann ich nun aber *schließen*, daß die Armut der Bewohner notwendig mit dem Dorfe verknüpft ist (z. B. durch hohe Steuern, schlechten und wenigen Boden, Trägheit). Das universale Urteil wird dadurch zu einem *generellen* Urteil, d. h. zu einem solchen, das das Prädikat als mit dem Wesen des Urteilssubjektes verknüpft aussagt: *Der* Bewohner dieses Dorfes ist arm. Darin sind aber jetzt alle vergangenen und zukünftigen Bewohner mit einbezogen unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß die Umstände, die die Armut bedingen, bestanden haben und bestehen bleiben. Schließe ich aus der Erfahrung, daß alle Planeten in elliptischen Bahnen die Sonne umlaufen, auf die Notwendigkeit dieser Verknüpfung, so bedeutet das generelle Urteil „Jeder Planet umläuft in elliptischer Bahn die Sonne", daß die jetzigen Planeten, auch wenn sie andere Massen, Entfernungen usw besäßen, und auch beliebig viele andere Planeten, falls es sie im Sonnensystem gäbe, elliptische Bahnen besitzen würden. Das generelle Urteil ist im Bereiche der sinnlichen Gegenstände *stets* allgemeiner, umfangsgrößer als das universale. Und zwar *muß* dieses Verhältnis hier vorliegen, weil alle *möglichen* Fälle bei sinnlichen Gegenständen niemals *verwirklicht* sein können.

Bereich der existierenden sinnlichen Gegenstände ist immer

nur eine Auswahl aus dem Bereiche der möglichen. Das universale Urteil umfaßt nun aber alle existierenden sinnlichen Gegenstände seines Umfanges, das generelle auch die möglichen.

Wir können jetzt so sagen. Im Grenzfalle kann die Erfahrungsgrundlage der eigentlichen Induktion alle Einzelfälle umfassen, die aus der Erfahrung bekannt sein können, und findet dann ihren logischen Ausdruck in einem universalen Urteil. Die eigentliche Induktion besteht darin, daß aus dieser Erfahrungsgrundlage ein generelles Urteil erschlossen wird. Die sogenannte vollständige Induktion ist also hier weiter nichts als der logische Ausdruck eines Grenzfalles der Erfahrungsgrundlage für die eigentliche Induktion.

Das universale Urteil kommt natürlich in jeder Wissenschaft ebensogut wie alle Tage im Leben vor, sonst könnten wir nicht einmal einfache Sätze von der Form „Alle A sind B" bilden. Selbstverständlich findet es sich auch in der Mathematik. Beachten wir aber, daß das universale Urteil alle Exemplare der im Subjekt (oder Prädikat) gemeinten Art umfaßt, dann erkennen wir gleich, daß es *in der Mathematik den Unterschied von universalen und generellen Urteilen nicht gibt.* Denn hier sind alle möglichen, d. h. widerspruchsfreien Gegenstände wirklich. Darum ist jede *Konstanz* einer Verknüpfung, die ein universales Urteil aussagt, hier *notwendig.* Man denke sich, der große Fermatsche Satz[1]) sei nacheinander bewiesen 1. für den Exponenten 4, 2. für alle ungeraden regulären Primzahlen, 3. für die übrigen ungeraden Primzahlen, dann ist das universale Urteil „Der Satz gilt für jeden Exponenten außer 2" zugleich ein generelles Urteil.

Nennt man[2]) vollständige Induktion den Schluß vom universalen auf das generelle Urteil, so liegt, wie Windelband selber erwähnt, kein prinzipieller Unterschied von der eigentlichen Induktion vor und deshalb auch kein Grund eines eigenen Namens.

Man kann also die Sache ansehen wie man will: eine Induktion gibt es auch als vollständige Induktion in der Mathematik nicht. Im letztgenannten Falle Windelbands nicht, weil in der Mathematik jedes universale zugleich ein generelles Urteil ist; im anderen Falle ebenfalls nicht, weil dann die sogenannte vollständige Induktion überhaupt keine Induktion ist.

---

[1]) Vgl. Lietzmann, Der pythag. Lehrsatz. S. 61 ff.

[2]) Windelband in der Enzyklopädie der philos. Wissenschaften, 1. Bd., S. 40.

54. Beispiele. Von den vorstehenden und den früheren Ausführungen aus sind nun die einzelnen Fälle leicht zu beurteilen, die als Beispiele mathematischer Induktionen angeführt werden. Wir besprechen hier die hauptsächlichsten.

1. Die einfachen speziellen Zahlformeln, wie $3 + 4 = 7$, $2 . 5 = 10$ und Reihen wie 1, 3, 5, 7, 9 ..., auch die allgemeinen Reihenformeln, sind nicht durch Induktion entstanden, sondern beruhen auf der Zahlreihe. Wenn die Formeln $3 . 4 = 4 . 3$, $6 . 7 = 7 . 6$ usw in $ab = ba$ zusammengefaßt werden, so liegt keine Induktion vor, weil bei immanenter Klassenbildung keine Inhaltsabnahme stattfindet. Der Mathematiker hält die allgemeine Formel $ab = ba$ nur für richtig, weil sie sich allgemein beweisen läßt, aber nicht, weil die speziellen Formeln richtig sind.

2. Irgend ein geometrischer Satz, z. B. der von der Winkelsumme im ebenen Dreieck, wird an einer einzelnen Figur bewiesen. Gelten soll er aber für alle Dreiecke. Das soll eigentliche Induktion sein.

Zunächst muß man sich klar halten, daß der Satz nicht von der Figur gilt, denn sie ist ein individueller sinnlicher Gegenstand; sondern er gilt von dem geometrischen Gebilde, das die Figur symbolisieren soll. Daß nun hier keine Induktion vorliegt, hat sogar Mill deutlich gesehen, trotz seiner sonstigen falschen Auffassung der Mathematik: „Es fehlt hier ... ganz die charakteristische Eigenschaft der Induktion, indem die erhaltene Wahrheit, obgleich sie wirklich eine allgemeine ist, nicht einzelner bewiesener Fälle wegen geglaubt wird. Daß alle Dreiecke diese Eigenschaft besitzen, schließen wir nicht daraus, daß einige sie besitzen [1]“. Nach dem vorhin (52) Gesagten würden wir auf diese Weise überhaupt zu keinem allgemeinen Urteil kommen können; denn im homogenen Bereich der Mathematik *kann* die Konstanz einer Verknüpfung eine Notwendigkeit einschließen, *muß* es aber nicht. Wir halten den Satz vielmehr deshalb für richtig, weil zum Beweise nichts benutzt wird, was von der Art des Dreiecks abhängt. Ein solcher Zusammenhang ist nur in einem homogenen Bereiche möglich, weil es darin keine Individuen gibt.

3. In der Mathematik kommt oft der Fall vor, daß bei Beweisen von Sätzen der Umfang des Subjektes oder Prädikates in

[1]) Mill, System der deduktionen und induktiven Logik. 1. Bd., S. 363.

mehrere Bereiche zerlegt und der Beweis für jeden Bereich selbständig geführt wird. Will man z. B. zeigen, daß der Peripheriewinkel gleich der Hälfte des Zentriwinkels ist, der mit ihm über demselben Bogen steht, so zeigt man die Richtigkeit des Satzes für die drei Fälle, daß der Mittelpunkt des Kreises innerhalb, außerhalb und auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt. Ein zweites Beispiel bietet die schon einmal angegebene Beweisgruppe beim großen Fermatschen Satz (53). Das sollen Fälle von vollständiger Induktion sein.

Wir wissen jetzt sogleich, daß die auf diese Weise erhaltenen Urteile nichts als universale und darum hier auch generelle Urteile sind.

4. Der berühmteste Fall der Induktion in der Mathematik ist der Fall der vollständigen Induktion, die in dem Schlusse von n auf $n + 1$ liegen soll. Wir erläutern ihn an einem Beispiele, indem wir den Satz beweisen: In jeder mit 1 beginnenden Reihe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist die Summe der Reihe gleich dem Quadrate der Anzahl ihrer Glieder. Wie wir den Satz *gefunden* haben, ob durch Induktion oder nicht, ist uns gleichgültig und hat auf den Beweis nicht den geringsten Einfluß. Wir nennen die Anzahl der Glieder n. Für $n = 1$ ist der Satz offenbar richtig; denn $1 = 1^2$. Wir nehmen nun an, daß der Satz für n Glieder richtig sei. Dann ist

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $(2n + 1)$, so kommt

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1.$$

Die rechte Seite ist aber gleich $(n + 1)^2$. Gilt der Satz also für n Glieder, dann auch für $n + 1$ Glieder.

Nun wissen wir, daß der Satz für $n = 1$ richtig ist; dann ist er aber gemäß diesem Beweise auch für $1 + 1 = 2$ richtig. Ist er aber für $n = 2$ richtig, dann gemäß demselben Beweise auch für $2 + 1 = 3$ usw. Also gilt er allgemein.

Drei Punkte dieses Schlusses sind beachtenswert.

Zunächst der Nachweis der Richtigkeit für $n = 1$. Wie man mit Wundt sagen kann[1]), er sei „aus experimentellen Ermittlungen hervorgegangen“, ist nicht recht verständlich. W...

[1]) Wundt, Logik, II³, 1907, S. 134.

zeigen durch Einsetzen und Ausrechnen, daß der Satz für $n = 1$ richtig ist. Das kann man als mathematisches Analogon zu der Erprobung eines Naturgesetzes im Experiment ansehen, aber nicht als mehr. Es handelt sich in Wirklichkeit nur um Folgerungen auf Grund der Zahlreihe.

Fürs zweite die „Annahme", daß der Satz für n Glieder gelte. Das hat man wegen der Form „wir nehmen an" eine Hypothese genannt. Nun ist zwar jede Hypothese eine Annahme, aber nicht jede Annahme eine Hypothese. Welchen logischen Charakter die Annahme hat, hängt davon ab, was sie für die Erkenntnis leistet. Solange eine Annahme für die Deutung von unverständlichen Erscheinungen als hinreichend, aber nicht als notwendig erwiesen ist, nennt man sie eine Hypothese. Was aber in unserem Falle und überhaupt bei Annahmen in der Mathematik vorliegt, ist eine Stufe in einem Schlusse, die notwendig ist, um das Bestehen (oder Nichtbestehen) eines Sachverhaltes zu beweisen.

Fürs dritte endlich der Schluß auf allgemeine Geltung. Hierin soll die vollständige Induktion stecken. In Wahrheit haben wir aber hier eine *Schlußkette*, die wegen der Struktur der Zahlreihe vollkommen gleichförmig ist und deshalb nicht vollständig durchlaufen zu werden braucht. Eine gewisse äußere Ähnlichkeit mit dem, was man „vollständige Induktion" zu nennen pflegt, ist allerdings vorhanden, indem man in der Schlußkette eine andere Form des universalen Urteils erblicken könnte. Wir wissen aber (53), daß das universale Urteil überhaupt keine Induktion umfaßt, daß aber das, was man in richtigerer Einsicht „vollständige Induktion" genannt hat, was aber eine eigentliche Induktion ist, nämlich der Schluß vom universalen aufs generelle Urteil, in der Mathematik unmöglich ist.

Es wäre also gut, wenn die Mathematiker besonders hier endlich einmal das Reden von der vollständigen Induktion sein ließen.

55. Die Induktion als heuristische Methode. In der Geschichte der Mathematik spielt die Induktion eine große Rolle, besonders in den ersten Anfängen. Wir haben ja früher (1) schon gehört, wie die Erfahrung zu mathematischen Wahrheiten geführt hat. Aber die Induktion ist nie ein *Beweismittel* der wissenaftlichen Mathematik gewesen, sondern nur eine heuristische :hode. Man kann nie Sätze durch sie *beweisen*, sondern nur

Sätze durch sie *erhalten.* Auch in der neueren Mathematik ist sie in diesem Sinne nicht unbekannt und wird wohl für immer ein zufällig angewandtes und zufällig zum Ziele führendes Mittel sein.

Genau so wertvoll, wie die Induktion in den Anfängen der Mathematik war, ist sie heute für den mathematischen Unterricht, der hierin eine Art von Rekapitulation der Geschichte sein sollte, ohne ihre Um- und Irrwege mitzugehen. Alle algebraischen und geometrischen Sätze des ersten Unterrichtes wird ein einsichtiger Lehrer seine Schüler an der Erfahrung finden lassen. Wenn der Geist dann langsam in die Eigenart des mathematischen Gegenstandsbereiches hineingewachsen ist und den Zwang des logischen Zusammenhanges fühlt, werden die allgemeinen Beweise leicht sein, während sie früher eine Qual gewesen und doch nur halb verstanden worden wären.

56. Gegenstand und Methode in der Mathematik. Wir kommen zum Schlusse auf ein Problem des Anfanges zurück. Wir hatten dort (1) erkannt, daß die tiefste logische Charakteristik einer Wissenschaft durch den Gegenstand erfolgt und daß die Methode vom Gegenstand bestimmt ist. Nachdem wir den Gegenstand der Mathematik in seinen wesentlichen Zügen logisch charakterisiert haben, ist es uns jetzt möglich, einen *Ausblick* auf die mathematische Methode zu bekommen. Wir geben damit unserer Untersuchung auch insofern ein natürliches und befriedigendes Ende, als dieses letzte Kapitel ja schon von einer Methode spricht, allerdings nicht um dieser Methode willen, sondern weil, wenn die Mathematik sich ihrer tatsächlich bediente, unsere ganze Gegenstandsbestimmung falsch sein würde. Es kann sich hier natürlich nur um die allgemeine Methode und auch lediglich um ein deutliches Herausstellen dessen handeln, was in der Untersuchung schon vorliegt.

Weil wir den Gegenstand der Mathematik mit den Gegenständen anderer Wissenschaften verglichen haben, wollen wir bei dieser kurzen Charakteristik der Methode auch zunächst die Naturwissenschaft zum Vergleiche heranziehen. Der Gegenstand der Naturwissenschaft ist die sinnliche Gegenstandswelt. Das logische Kennzeichen dieser Wirklichkeit ist ihre Heterogeneität. Wir haben nun eine absolute Heterogeneität (30) von der totalen (50) unterschieden. Die Heterogeneität der sinnlichen Wirklich-

keit ist nicht total, sondern überlagert von einer gewissen Homogeneität. Durch diese Struktur wird, wie uns das vorliegende Kapitel gezeigt hat, die I-U-R im sinnlichen Gegenstandsbereich erfüllt. Durch die I-U-R wird aber, wie wir weiter hörten, die Induktion möglich. Nun ist die allgemeine Methode der Naturwissenschaft logisch als *generalisierend* charakterisiert; die Naturwissenschaft sucht nach allgemeinen Begriffen und nach Gesetzen. Diese Generalisation wird *praktisch durchgeführt* mit Hilfe spezieller Methoden wie der Induktion und Deduktion; ihre Resultate werden aber *gerechtfertigt* letzten Endes nur durch die Induktion. Auf diese Weise hängt der logische Charakter der allgemeinen naturwissenschaftlichen Methode mit der logischen Struktur des Gegenstandes zusammen.

Auch die allgemeine Methode der Mathematik muß von der Logik als *generalisierend* bestimmt werden. Aber sie unterscheidet sich von der naturwissenschaftlichen Methode wesentlich in zwei Punkten. Erstens *erreicht* die Mathematik ihre Generalisationen zwar auch durch spezielle Methoden wie Induktion und Deduktion, wenn auch hier die Deduktion überwiegt; sie *rechtfertigt* sie indes ausschließlich durch Deduktion, und diese Deduktion ist absolut sicher. Zweitens besitzen die Resultate der mathematischen Generalisationen, soweit sie sich in Formeln darstellen lassen, die Eigentümlichkeit, daß sie nicht, wie die sonstigen allgemeinen Begriffe, die Besonderheiten der einzelnen, in ihnen zusammengefaßten Gegenstände ausschließen, sondern sie enthalten die speziellen Gegenstände mit ihren sämtlichen Besonderheiten (52, Anmerkung). Wir wissen aus unseren Untersuchungen, daß diese Unterschiede ganz auf der logischen Struktur der mathematischen Wirklichkeit beruhen, die homogen ist, aber von einer gewissen Heterogeneität überlagert wird (30).

Dadurch, daß sowohl der Gegenstandsbereich der Naturwissenschaft als auch der der Mathematik Homogenes enthält, ist bei beiden Wissenschaften die Generalisation überhaupt möglich (50); durch den Unterschied in der Mischung von Heterogeneität und Homogeneität entstehen die Unterschiede in den generalisierenden Methoden.

Literaturhinweise

Zu Kap. I und II. Die hier zugrunde gelegte Auffassung der Logik als einer Wertwissenschaft, die zum erstenmal den Gegenstand der Logik vollkommen klar in sich und in seinem Unterschiede von den Gegenständen der anderen Wissenschaften aufgezeigt hat, wurde angebahnt von dem auch wegen seines mathematischen Weitblickes bedeutsamen Bolzano (Wissenschaftslehre, 4 Bde., 1837) und von Lotze (Logik, 1874), kritisch — aber auch *nur* kritisch — gefördert von Husserl (Logische Untersuchungen[2], 2 Bde., 1913), in den Grundgedanken festgelegt von Rickert (Gegenstand der Erkenntnis[4 u. 5], 1921). Wenn man Heidegger (Die Kategorien- und Bedeutungslehre des Duns Skotus, 1916) glauben darf, dann besaß die mittelalterliche Scholastik, besonders ausgeprägt ihr selbständigster und hervorragendster Denker Duns Skotus, schon den Grundgedanken in einigen wesentlichen Zügen. Diese historische Schrift bietet zugleich eine Einführung in einige Problemgebiete der Wertlogik (auch der Logik des Zahlbegriffs), während die Dissertation desselben Verfassers (Die Lehre vom Urteil im Psychologismus, 1914) kritisch und positiv den Ansatz zu einer Lehre vom Urteil gibt. Tief in die Logik hinein und weit über Rickert hinaus führen die beiden Bücher von Lask (Die Logik der Philosophie und die Kategorienlehre, 1911; Die Lehre vom Urteil, 1912), in dessen Theorie, soweit sie sich als haltbar erweist, auch die hier vorgetragene Logik des Zahlbegriffs hineingearbeitet werden müßte.

Zu Nr. 8. Die am weitesten verbreitete Auffassung der Mathematiker über das Verhältnis von Logik und Mathematik stellt Couturat dar (Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von Siegel, 1908). Ausführlich begründet hat sie Russell in den zu (9) angemerkten Werken.

Zu Nr. 9. Die ältere Darstellung der Logistik, die im Sinne der heutigen nur Teile dieser Wissenschaft bearbeitet, in den Werken von Boole, Peirce, Venn, Schröder, Couturat, Delre. Wer diese Werke studieren will, wird sie leicht finden; er muß aber sehr viel überflüssige Zeit haben. Zur Kenntnisnahme dieser Art genügt die kurze Einführung, die Hontheim (Der logische Algorithmus, 1895) oder Wundt im ersten Bande seiner „Lo[illegible]“ (4. Aufl., 1919) gibt, der erstere mit zu hoher Einschätzun[illegible] [illegible]er

zweite mit nicht immer richtigen Beispielen. Diese und andere Arbeiten haben in vollkommenster Weise zusammengefaßt und weitergeführt B. Russell (The principles of mathematics, I, 1903), B. Russell u. A. N. Whitehead (Principia mathematica, 3 Bde., 1910 ff.); zwei kürzere Darstellungen von Couturat in dem bei (8) angemerkten Buche und in der „Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften“ (Herausgeg. von Ruge, 1. Bd., 1912.)

Zu Kap. IV. In den Nummern 17 bis 28 können bei dieser kurzen Darstellung nur die klassischen Gedanken Rickerts (Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs. Logos 2, 26, 1911/12) wiederholt und einige Ansätze zur Weiterführung gegeben werden. Etwas verwandt damit, aber nicht unbestreitbar scheinen die Andeutungen von Ach (Über die Erkenntnis a priori insbesondere in der Arithmetik, I, 1913) zu sein, deren ausführliche Darstellung noch aussteht; wenn er z. B. sagt, daß im mathematischen Gebiete vom „Index der Unvergleichbarkeit des Gegenstandes“ abstrahiert sei, so meint er vermutlich dasselbe, was wir Homogeneität des Gebietes genannt haben. Einiges Richtige auch bei Hönigswald (Zum Streit über die Grundlagen der Mathematik, 1912). Die Schrift von Voss (Über das Wesen der Mathematik², 1913) gibt, auch zu Kap. VI, viel Material, aber wenig logische Einsicht; etwas mehr nach dieser Seite bringt die spätere Schrift Voss, „Über die mathematische Erkenntnis“ (Kultur der Gegenwart, III, 1, 1914). Die zu hoch geschätzte Rede Knesers (Mathematik und Natur, 1913) kann zu dem Problem von Nr. 29 (und 41) sehr wenig beitragen. Der Raum des Textes reicht nicht aus, um zu den individuell ausgeprägten Ansichten über die Zahl bei Helmholtz („Zählen und Messen“ in Philosophische Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, 1887), Kronecker (Über den Zahlbegriff, Journal für reine u. angew. Mathematik **101**, 337, 1887), Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?³, 1911), J. Cohn (Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, 1908), G. E. Lipps (Mythenbildung und Erkenntnis, 1907), Natorp (Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften², 1921), Cassirer (Substanzbegriff und Funktionsbegriff, 1910) u. a. *im einzelnen* Stellung zu nehmen. Ihre Grundgedanken sind sachlich alle berücksichtigt.

Zu Nr. 31. Die Ableitung der Zahl aus der Menge bei Frege (I Grundlagen der Arithmetik, 1884) und in den zu Nr. 9 zi ·ten Büchern von Russell. Nicht immer zutreffende Kritik

in Kerrys Aufsatz „Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung“ (Vierteljahrsschrift für wissenschaftl. Philosophie **11**, 287, 1887) und in den vorhin angemerkten Werken von Cohn (S. 165 ff.), Natorp (S. 112 ff.) und Cassirer (S. 59 ff.). Es verdient wohl auch hervorgehoben zu werden, daß Couturat, nachdem er anfangs (De l'infini mathématique, 1896) die Ableitung der Zahl aus der Menge für einen Zirkel angesehen, sie aber dann in der Russellschen Form für richtig gehalten hat (in dem bei Nr. 8 zitierten Buche), neuerdings (Enzyklopädie der philos. Wissensch. I, S. 180 f.) wieder den alten Standpunkt einzunehmen scheint. H. Weyl (Das Kontinuum, 1918) hält ebenfalls die natürliche Zahlreihe für ein letztes Fundament des mathematischen Denkens und lehnt deshalb jene Ableitung ab. Ich erinnere auch noch an den Ausspruch Minkowskis (Diophantische Approximationen, 1907, Vorwort): „Der Urquell aller Mathematik sind die ganzen Zahlen.“ — Die Schrift von Ziehen (Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre, 1917) gibt keine befriedigende Lösung ihres Problems, weil die Gegenstände der Logik und Mathematik nicht in ihrem Typus erkannt sind. — Den im Text dargelegten Verhältnissen entspricht wohl am besten die Definition: Die Menge *als mathematischer Gegenstand* ist die Zusammenfassung von algebraischen Gegenständen zu einem Ganzen. Unter algebraischen Gegenständen sind hier Zahlen, ihre Beziehungen und Mengen verstanden. Sämtliche andere Mengen sind danach keine mathematischen Gegenstände, auch dann nicht, wenn sie geometrische Gegenstände als Elemente enthalten, wie z. B. die Menge aller Symmetrieebenen eines Würfels. Alle diese Mengen stehen der mathematischen Menge genau so gegenüber, wie z. B. die Gegenstände der sinnlichen Wirklichkeit der Zahl. Diese Mengen müssen erst in dem früher dargelegten Sinne homogeneisiert werden, ihre Elemente müssen sich erst *nur* darstellen als Stellen im homogenen Medium, — dann kann die mathematische Menge auf sie angewandt werden. Entsprechendes gilt von den Begriffen des mathematischen Systems und der Gruppe. Alle kollinearen Transformationen des Raumes beispielsweise *sind* (oder *bilden*) keine Gruppe — so wenig wie 5 Äpfel die Zahl 5 sind oder bilden —, sondern man kann auf diese Gesamtheit die unendliche, nicht kommutative Gruppe anwenden. Das Studium der Mengen mit Ausnahme der vorhin definierten mathematischen Mengen ist also *angewandte* Mengenlehre.

Zu Nr. 32. Über die Fiktion vgl. meinen Aufsatz „Die Fiktion in der Mathematik und der Physik" (Die Naturwissenschaften 5, 341, 1917).

Zu Kap. V u. VI. Zu dem Mathematischen vgl. Wellstein in Weber-Wellstein (Enzyklopädie der Elementarmathematik², 2. Bd., 1907), dessen philosophische Ausführungen mit Vorsicht aufgenommen werden müssen, vor allem weil er, wie die meisten Mathematiker, Logik und Mathematik nicht unterscheiden kann. Zu dem Logischen Stumpf „Zur Einteilung der Wissenschaften" (Abh. d. Akad. d. Wissensch. Berlin, 1907). Zur philosophischen Raumlehre mein Buch (Die philosophischen Probleme der Einsteinschen Relativitätstheorie, 1922) und Study (Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum², 1922); letzteres gibt auch eine sehr gute Einführung in die nichteuklidische Geometrie. Bei allen vorhin genannten Logikern, die über den Raum schrieben (Natorp, Cassirer, Cohn u. a.), ist zu beachten, daß sie durchschnittlich den physischen Raum nicht vom geometrischen trennen und dadurch zu merkwürdigen Behauptungen besonders über den euklidischen Raum kommen.

Zu Nr. 42. Die erste systematische Darstellung dieser Art Geometrie hat jetzt H. Beck (Koordinatengeometrie, 1. Bd., 1919) gegeben.

Zu Kap. VII. Die Literatur zur Relativitätstheorie ist so reichhaltig und bekannt, daß sich eine Angabe hier erübrigt. Wertvolle Fassung seiner Gedanken über Raum und Materie bei Einstein (Äther und Relativitätstheorie, 1920). Die erste bedeutsame und positiv schaffende Kritik der Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie bei Fr. Adler (Ortszeit, Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik, 1920); sie ist natürlich auch grundlegend für die Kritik der allgemeinen Relativitätstheorie. Für die philosophische Seite der Relativitätstheorie sei auf mein vorhin zitiertes Buch verwiesen. Für unser besonderes Problem kommt in Betracht: A. Haas, Die Physik als geometrische Notwendigkeit (Die Naturwissenschaften 8, 121, 1920); E. Freundlich, Zu dem Aufsatze „Die Physik als geometrische Notwendigkeit" von Arthur Haas (ebenda 8, 234, 1920); M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins (1920, VII, 6); E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie (1921, Kap. VI).

Zu Nr. 49. Vorsichtiger als viele Relativitätstheoretiker ist Einstein in der Schrift „Geometrie und Erfahrung" (1921), indem er eine Geometrie als Zweig der reinen Mathematik und eine praktische Geometrie unterscheidet. Das ist aber eine irreführende Bezeichnung; denn die praktische Geometrie ist weiter nichts als die an Hand der Erfahrung gemachte Feststellung des Raummodells, das zur Beschreibung der Tatsachen am geeignetsten ist, also nichts als die Anwendung der reinen Geometrie auf die physische Erfahrungswelt.

Zu Kap. VIII. Den Zusammenhang zwischen Heterogeneität, I-U-R und Induktion hat Zilsel (Das Anwendungsproblem, 1916) gesehen, ohne daraus die Konsequenz für die Mathematik zu ziehen (nach meinem Gefühl ziehen zu können). Ich schließe mich seinen Resultaten in der Hauptsache an und untersuche dann den entsprechenden Zusammenhang in der Mathematik. Eine der selbständigsten Theorien der Induktion bietet Erdmann (Logik I², 1907, S. 730 ff.), der vor allem die vollständige Induktion gänzlich abschüttelt. In dem Aufsatz „Zur Theorie des Syllogismus und der Induktion" (Philos. Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, 1887, S. 195 ff.) gibt derselbe Verfasser eine Kritik der herkömmlichen Beispiele von mathematischer Induktion, wie sie Jevons und Wundt formuliert haben, erkennt aber den eigentlichen Grund nicht, warum es keine Induktion in der Mathematik geben kann.

Zu Nr. 55. Vgl. Branford, Betrachtungen über mathematische Erziehung, 1913.

Zu Nr. 56. Eine wissenschaftstheoretisch befriedigende Untersuchung der mathematischen Methoden gibt es noch nicht. Das Verhältnis der allgemeinen mathematischen Methode zum Gegenstand der Mathematik ist zum erstenmal in dieser Schrift (und dem unten zitierten Aufsatz) studiert. Die naturwissenschaftliche Methode ist im Unterschiede von der historischen am tiefsten von Rickert (Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung³ u. ⁴, 1921; Kulturwissenschaft und Naturwissenschaft⁴ u. ⁵, 1921) erfaßt. Nur drückt er, wie mir scheint, nicht genügend den organischen Zusammenhang von Gegenstand und Methode aus, sondern stellt die Methode zu sehr als selbständiges Element in den Vordergrund. Weiterbildungen und neue Ansätze will meine Arbeit „Strukturwissenschaft und Kulturwissenschaft" (Kantstudien 27, 59, 1[illegible]) geben.